

نمودارهای چندمتغیره

تالیف: اصغر بدقلی (سرگروه ریاضی دوره دوم متوسطه منطقه جلفا)

نمودارهای چندمتغیره نمودارهایی هستند که مقادیر دو یا چند متغیر را به طور همزمان نشان می دهند.

در درس یک فصل ۴ کتاب درسی ریاضی و آمار ۱، با نمودارهای یک متغیره آشنا شدیم و دیدیم جامعه های آماری مورد بررسی تنها یک متغیر داشتند به عنوان مثال در فعالیت صفحه ۱۰۰ کتاب درسی موضوع علل آسیب دیده گی های منازل مطرح شد و دیدیم نمودارهای بررسی شده این فعالیت در مورد متغیر آسیب دیده گی های منازل هستند.

به عنوان مثالی دیگر اگر قد دانش آموزان یک کلاس را بررسی کنیم تنها متغیر قد خواهد بود. اگر در همین کلاس وزن دانش آموزان به طور جداگانه مورد بررسی قرار گیرد تنها متغیر این بررسی فقط وزن دانش آموزان خواهد بود. حال اگر بخواهیم در این کلاس به سؤالاتی از قبیل

۱- تغییرات دو متغیر قد و وزن با هم چگونه است؟

۲- آیا افراد بلند قد وزن بیشتری دارند؟

و ... پاسخ دهیم با جامعه دومتغیری روبه رو خواهیم بود.

می توان مسائلی را مطرح کرد که تعداد متغیرها در آنها از دو تا هم بیشتر باشند مثلاً در مورد کشورهای مختلف جهان می توان متغیرهایی مانند جمعیت، مساحت، درصد آب و ... را در نظر گرفت (فعالیت صفحه ۱۱۰) و یامثلاً در کشاورزی، میزان محصول کشاورزی به میزان آب، میزان کود، نوع کود و تابش آفتاب و نوع خاک بستگی دارد.

نمودارهای چند متغیره را به **۳ گروه اصلی** تقسیم میکنیم

۱- نمودار پراکنش نگاشت ۲- نمودار حبابی ۳- نمودار راداری

هرکدام از این نمودارها را به صورت جداگانه بررسی می کنیم.

نمودار پراکنش نگاشت:

یک نمودار ۲ متغیره در قالب نمودار ۲ بعدی است و از تعدادی نقطه تشکیل شده است و هر نقطه مانند A را می توان به صورت $A(a, b)$ نمایش داد که a مقدار متغیر اول را روی محور x ها و b مقدار متغیر دوم را روی محور y ها نشان میدهد.

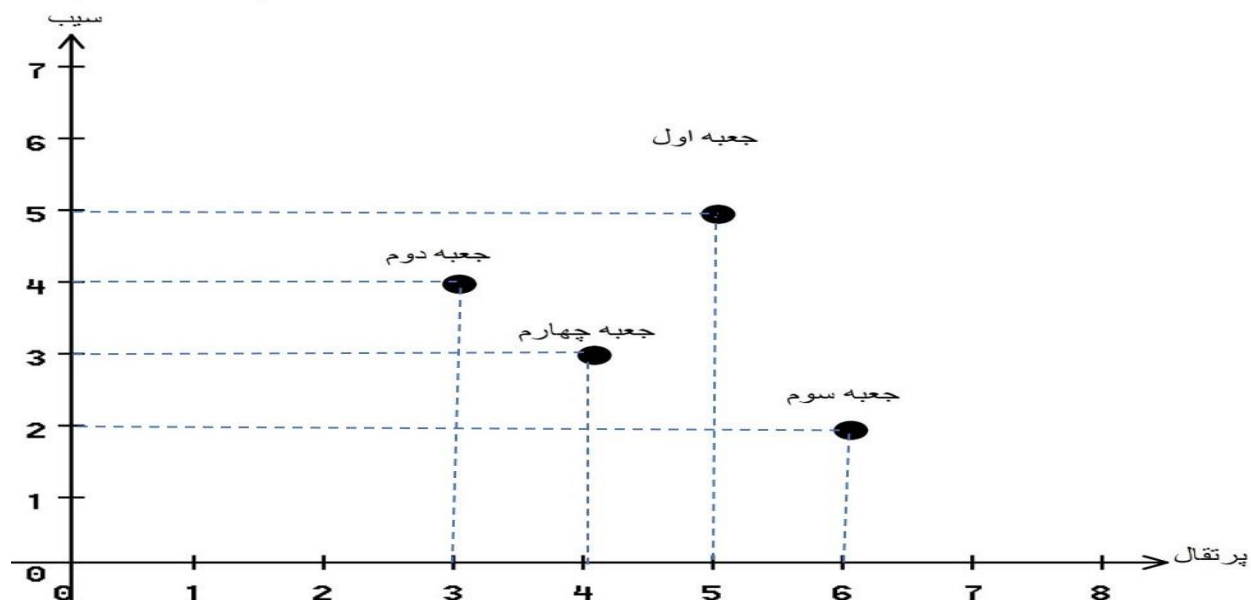
نکته: از این نمودار برای نمایش متغیرهای کمی استفاده می شود.

مثال ۱- نمودار پراکنش نگاشت جدول زیر را رسم کنید.

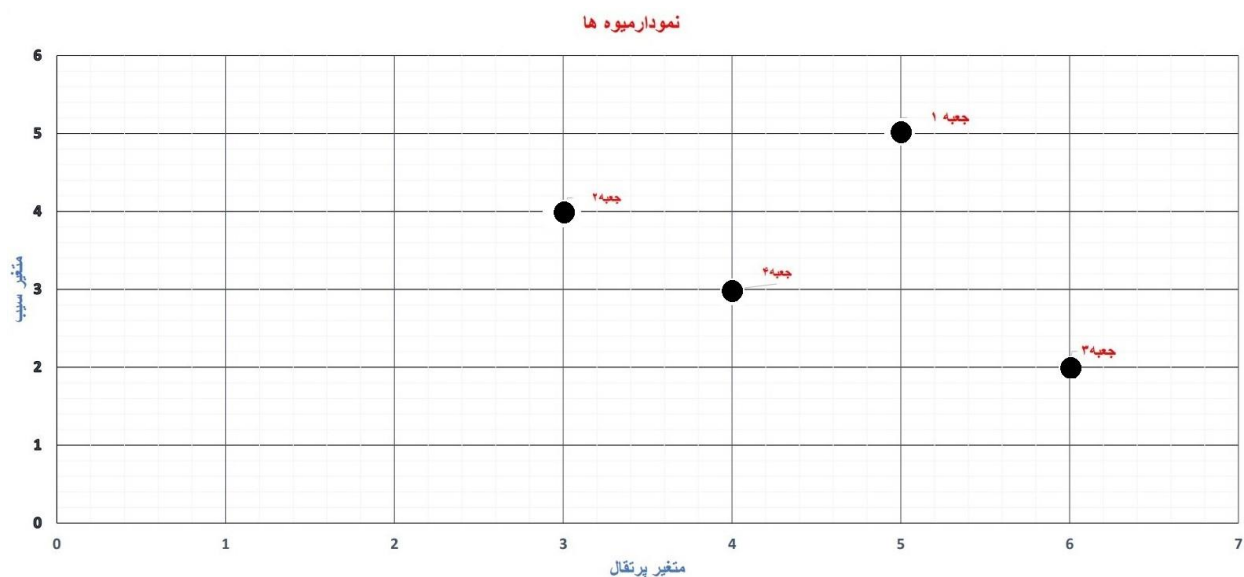
میوه \ جعبه	جعبه اول	جعبه دوم	جعبه سوم	جعبه چهارم
پرتقال (کیلو)	۵	۳	۶	۴
سیب (کیلو)	۵	۴	۲	۳

حل: متغیر اول را پرتقال و متغیر دوم را سیب در نظر میگیریم و برای رسم نمودار پراکنش نگاشت نقاط را به صورت $(۵ و ۱۲)$ جعبه اول ، $(۱۵ و ۱۰)$ جعبه دوم ، $(۵ و ۱۲)$ جعبه سوم در نظر میگیریم در هر جعبه مولفه اول مقدار پرتقال جعبه و مولفه دوم مقدار سیب جعبه را نشان میدهند اگر این نقاط را روی دستگاه محورها مختصات (روی محور طول مقادیر مولفه اول و روی محور عرض مقادیر مولفه دوم) نشان دهیم خواهیم

داشت:



و با رسم نمودار این جدول به کمک نرم افزار اکسل خواهیم داشت:

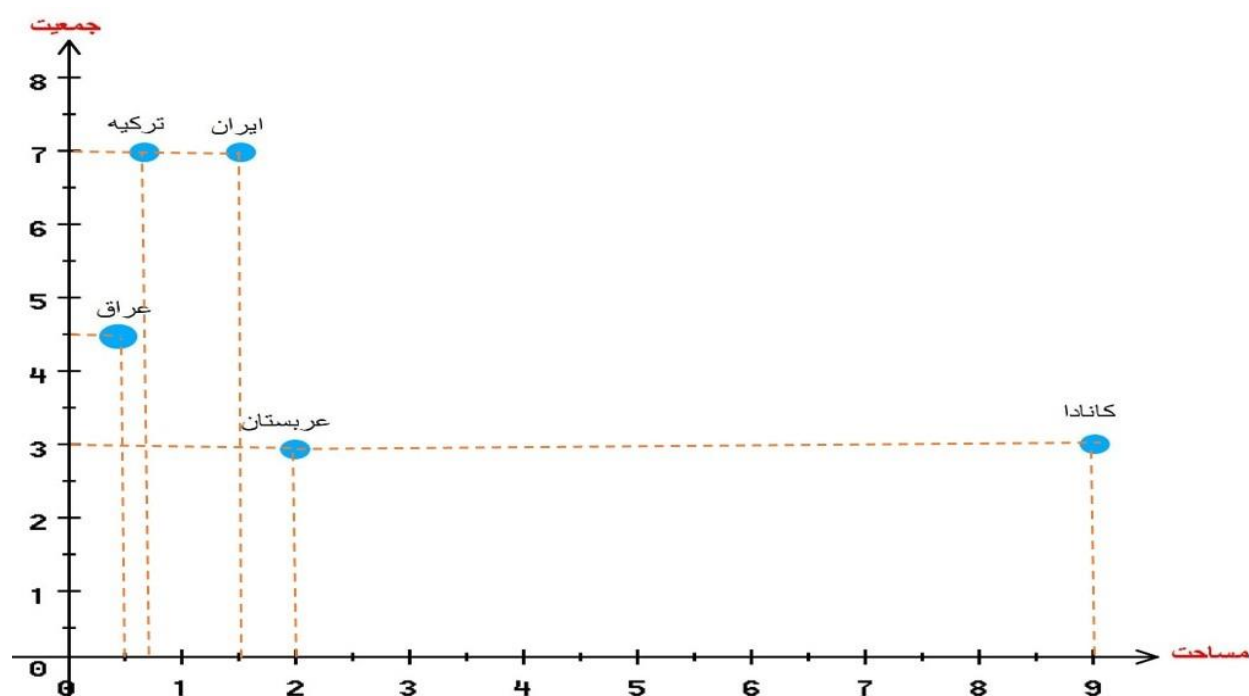


مثال ۲ - نمودار پراکنش نگاشت جدول زیر را رسم کنید.

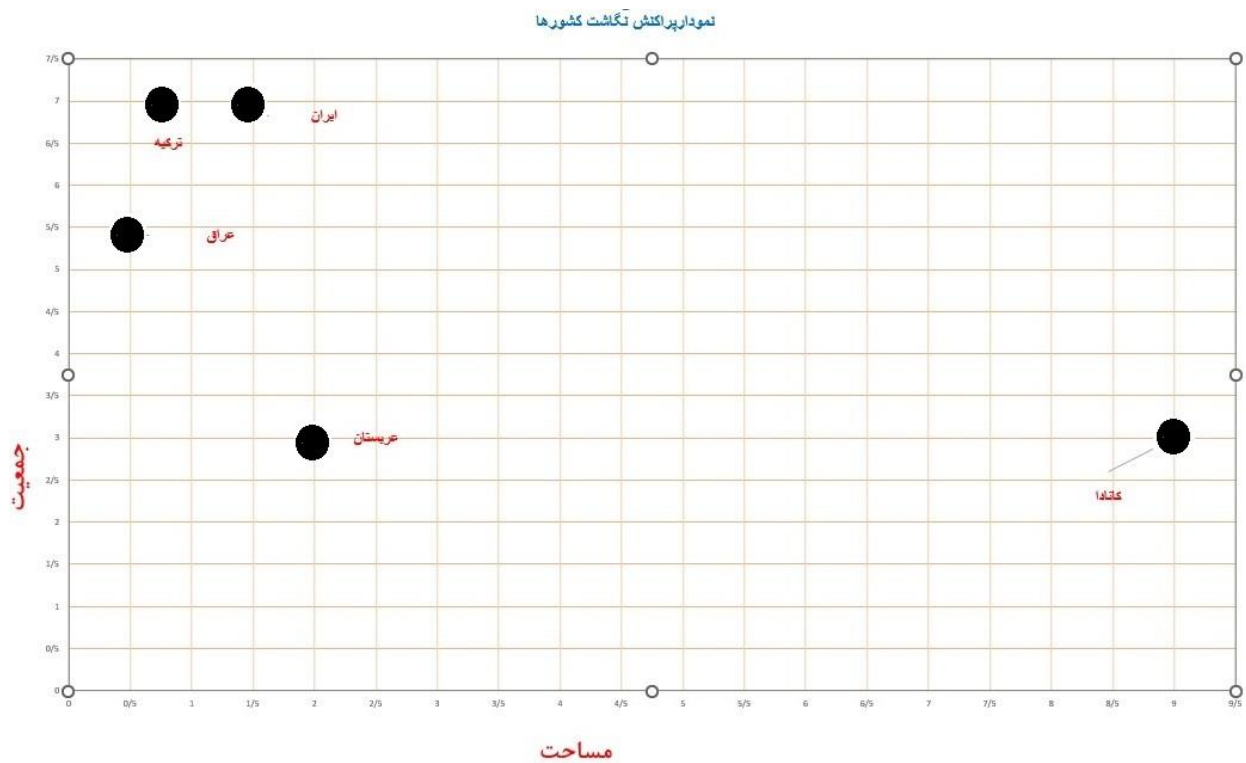
۷	۱/۵	ایران	۱
۷	۰/۷۵	ترکیه	۲
۳	۲	عربستان	۳

۴	نام کشور	مساحت (میلیون کیلومتر مربع)	جمعیت (۱۰ میلیون نفر)
۵	عراق	۰/۵	۴/۵

حل: در حل این مثال متغیر اول را مساحت و متغیر دوم را جمعیت در نظر میگیریم برای رسم نمودار پراکنش نگاشت نقاط را به صورت (جمعیت و مساحت) کشور در نظر میگیریم به عنوان مثال (۸ و ۱/۵) ایران نشان داده میشود که در هر نقطه مولفه اول مقدار مساحت (بر حسب میلیون کیلومتر مربع) کشور و مولفه دوم مقدار جمعیت (بر حسب ۱۰ میلیون نفر) را نشان میدهند اگر این نقاط را روی دستگاه محورهای مختصات (روی محور طول مقادیر مولفه اول و روی محور عرض مقادیر مولفه دوم) نشان دهیم خواهیم داشت:



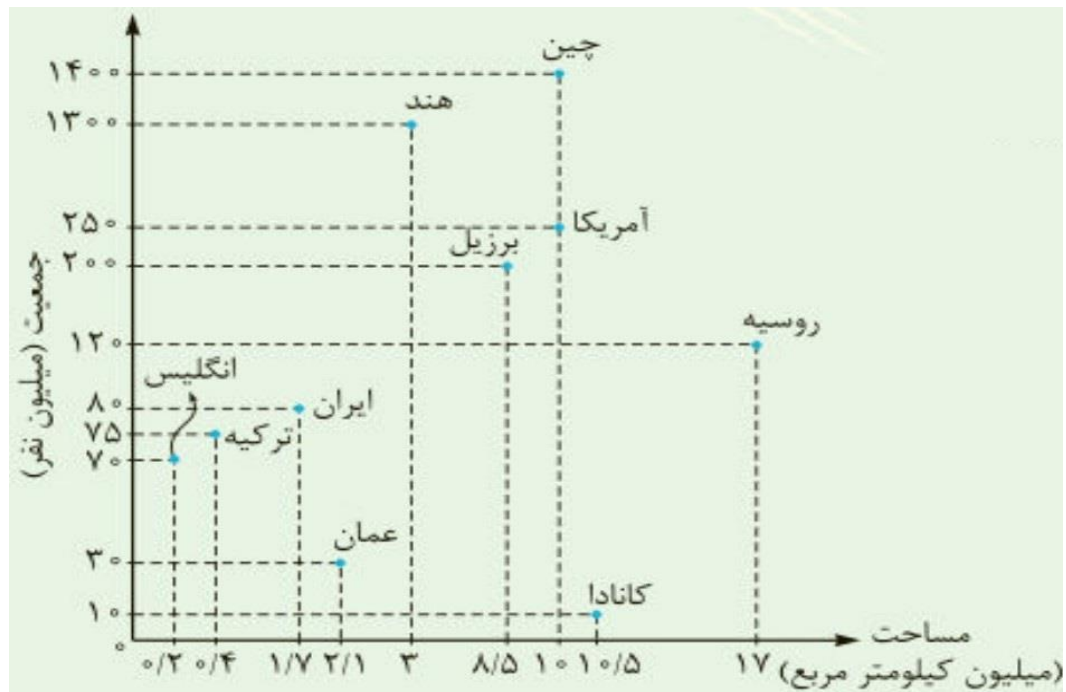
و با رسم نمودار این جدول به کمک نرم افزار اکسل خواهیم داشت



تمرین ۱- داده های مربوط به قد و وزن چند دانش آموز در جدول زیر داده شده است نمودار پراکنش نگاشت آنها را رسم کنید.

حسین	مهدی	جواد	حمید	وحید	مجید	علی	
۱۷۵	۱۶۵	۱۸۰	۱۶۵	۱۶۰	۱۷۰	۱۵۰	قد
۵۴	۵۹	۶۰	۵۸	۵۵	۶۵	۶۲	وزن

مثال ۳- با توجه به نمودار پراکنش نگاشت زیر به سوالات زیر پاسخ دهید؟



الف) جدول زیر را کامل کنید.

نام کشور	ایران	ترکیه	کانادا	آمریکا	انگلیس	برزیل	روسیه	چین	هند	عمان
جمعیت (میلیون نفر)										
مساحت (میلیون کیلومتر مربع)										

ب) میانگین جمعیت کشورها را بیابید.

ج) میانگین مساحت کشورها را بیابید.

حل: الف)

نام کشور	ایران	ترکیه	کانادا	آمریکا	انگلیس	برزیل	روسیه	چین	هند	عمان
جمعیت (میلیون نفر)	۸۰	۷۵	۱۰	۲۵۰	۷۰	۲۰۰	۱۲۰	۱۴۰۰	۱۳۰۰	۳۰
مساحت (میلیون کیلومتر مربع)	۱.۷	۰.۴	۱۰.۵	۱۰	۰.۲	۸.۵	۱۷	۱۰	۳	۲.۱

$$\text{ب) میانگین جمعیت کشورها} = \frac{۸۰+۷۵+۱۰+۲۵۰+۷۰+۲۰۰+۱۲۰+۱۴۰۰+۱۳۰۰+۳۰}{۱۰} = \frac{۳۵۳۵}{۱۰} = ۳۵۳.۵$$

ج) برای پیدا کردن میانه مساحت کشورها را به ترتیب از کوچکترین مقدار به بزرگترین مقدار مرتب می کنیم
 پس: ۰.۲ ، ۰.۴ ، ۱.۷ ، ۲.۱ ، ۳ ، ۸.۵ ، ۱۰ ، ۱۰.۵ ، ۱۰ ، ۱۷

چون تعداد داده ها ۱۰ می باشد لذا میانگین دو داده وسطی مقدار میانه را مشخص می کند یعنی

$$\text{میانۀ مساحت} = \frac{۳+۸.۵}{۲} = ۵.۷۵$$

نمودارهای حبابی:

یک نمودار ۳ متغیره در قالب نمودار ۲ بعدی است و به جای نقاط از دایره های توپر استفاده می شود هر دایره در نمودار حبابی، در واقع یک سه تایی مرتب به صورت (V_1, V_2, V_3) را مشخص میکند که در آن داریم:

V_1 : موقعیت نقطه روی محور افقی

V_2 : موقعیت نقطه روی محور عمودی

V_3 : اندازه نقطه (مساحت دایره ها)

نکته ۱: نمودارهای حبابی را میتوان گونه خاصی از نمودارهای پراکنش نگاشت دانست که برای نمایش همزمان سه متغیر عددی به کار میروند و در آنها به جای نقطه از دایره های توپر استفاده میشود.

نکته ۲: اگر S_1 و S_2 به ترتیب دو مساحت دلخواه (به شعاع های r_1 و r_2) از داده های متغیر سوم یعنی

$$V_3 \text{ باشند در اینصورت } \frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi(r_1)^2}{\pi(r_2)^2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$$

نکته ۳: متغیر سوم یعنی V_3 (مساحت دایره ها) متناسب با توان دوم شعاع دایره ها است لذا نمی تواند صفر یا

منفی باشد $\left(\text{شعاع حبابها}\right)^2 \sim \text{متغیر سوم ویا} \sim \sqrt{\text{متغیر سوم}} \sim \text{شعاع حبابها}$

نکته ۴: برای نشان دادن هر سه تایی مرتب به صورت (V_1, V_2, V_3) ابتدا محورهای مختصات شامل محورهای V_1 (محور طول) و محور V_2 (محور عرض) را رسم می کنیم و سپس مکان نقطه (V_1, V_2) را

روی صفحه مختصات مشخص میکنیم و در آخر به مرکز نقطه (V_1, V_2) و به شعاع $\sqrt{V_3}$ یا متغیر سوم $\sqrt{\quad}$ دایره ای توپر رسم میکنیم.

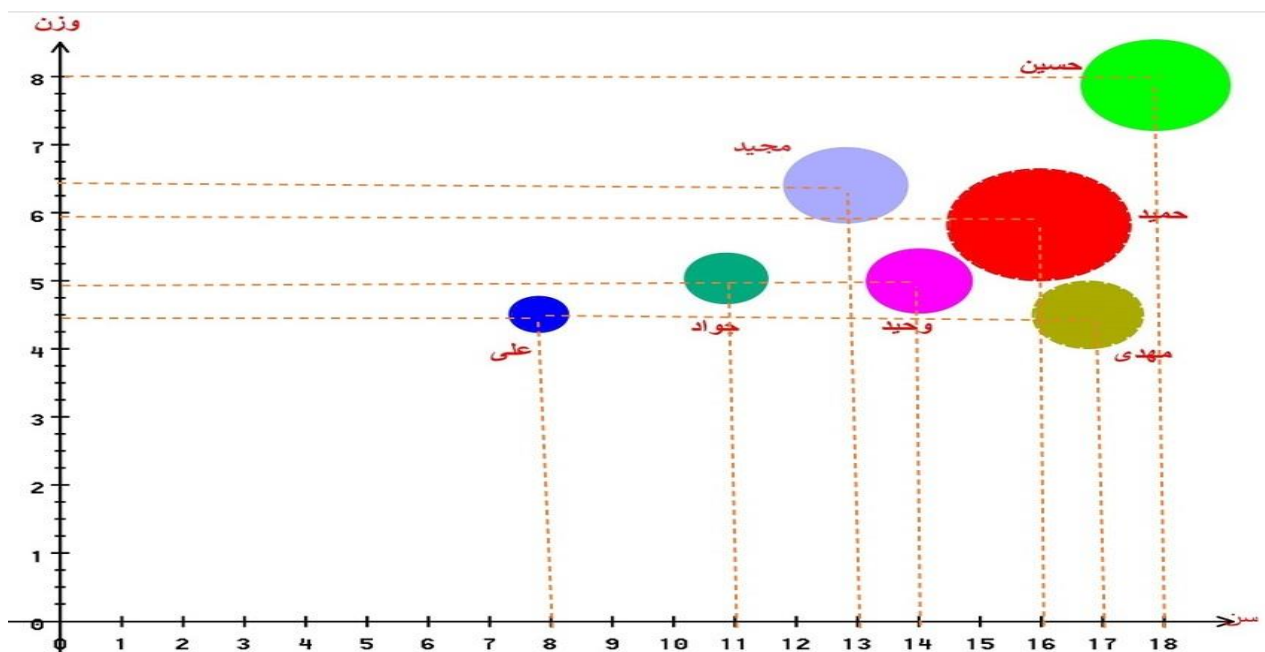
نکته ۵: از این نمودار برای نمایش متغیرهای کمی استفاده می شود.

مثال ۴- در مسابقات کشتی در یک منطقه اعضای یک تیم به صورت جدول زیر امتیازاتی را کسب کرده اند نمودار حبابی جدول را رسم کنید.

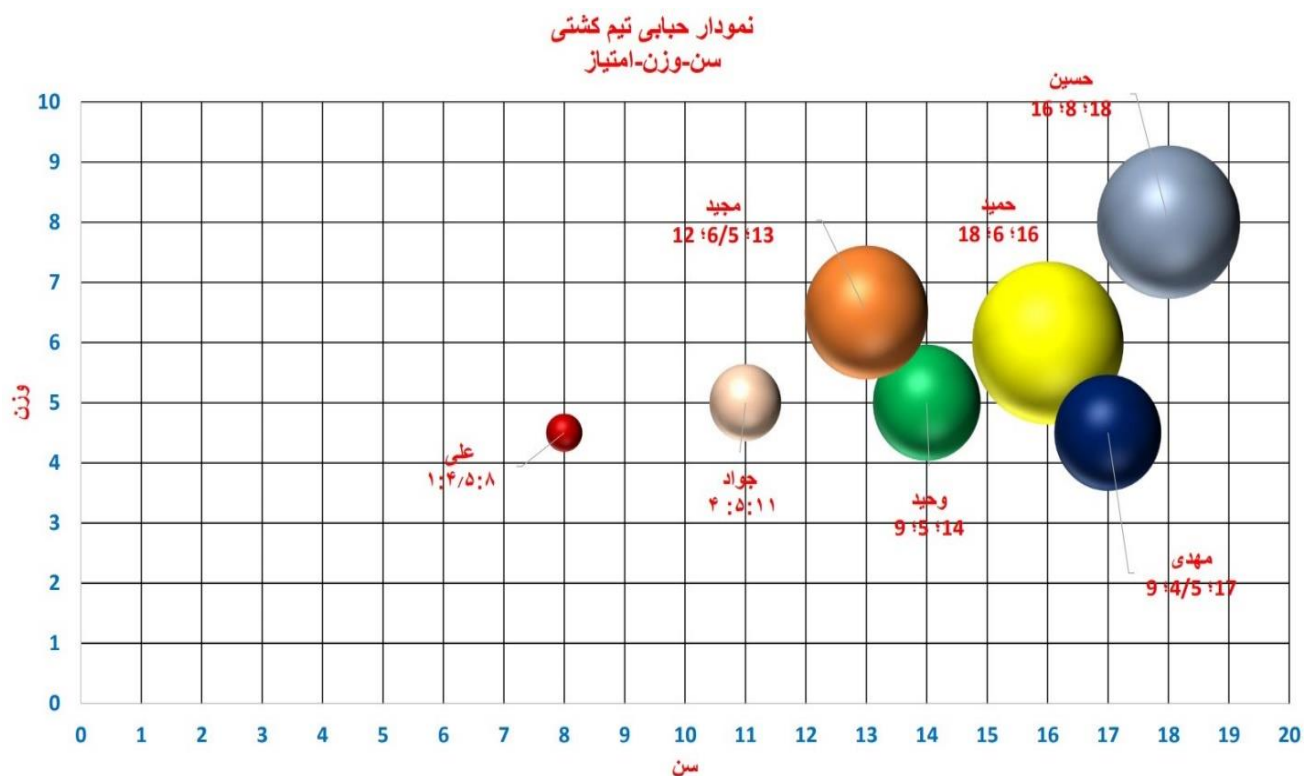
علی	حسین	وحید	حمید	جواد	مهدی	مجید	
۸	۱۸	۱۴	۱۶	۱۱	۱۷	۱۳	سن
۴.۵	۸	۵	۶	۵	۴.۵	۶.۵	وزن (واحد ۱۰ کیلوگرم)
۱	۱۶	۹	۱۸	۴	۹	۱۲	امتیاز

حل: متغیر اول (V_1) را سن و متغیر دوم (V_2) را قد و متغیر سوم (V_3) را وزن در نظر میگیریم برای رسم نمودار حبابی نقاط را به صورت (وزن و قد و سن) در نظر میگیریم به عنوان مثال (۱ و ۴/۵ و ۸) علی نشان داده

میشود و با توجه به نکته ۳ خواهیم داشت $\sqrt{12} = 3.4$ $\sqrt{18} = 4.2$



می توان در رسم نمودار حبابی نیز از نرم افزار اکسل کمک گرفت:

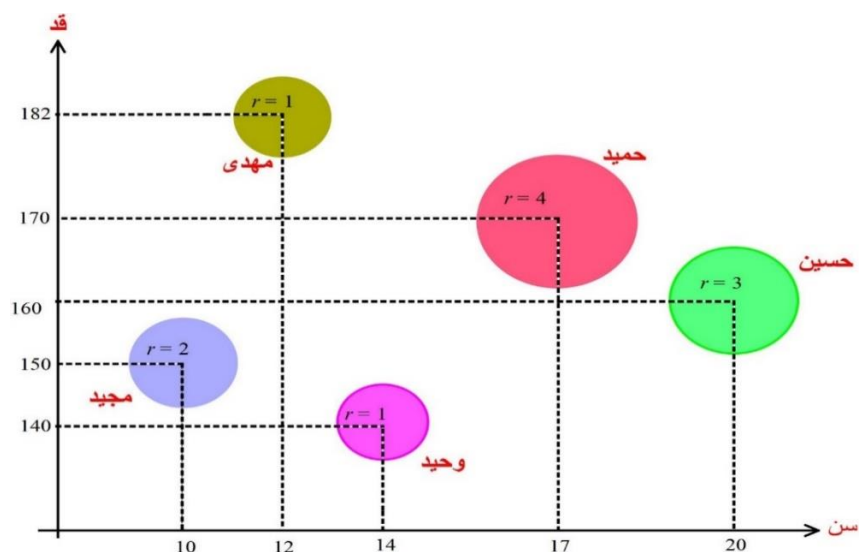


مثال ۵- در نمودار حبابی زیر مساحت دایره ها را وزن افراد (به صورت فرضی) در نظر گرفته ایم با توجه به نمودار به سوالات زیر جواب دهید:

الف) متغیرهای اول، دوم و سوم را مشخص کنید؟ ب) کدام فرد قد بیشتری دارد؟

پ) کدام فرد سن بیشتری دارد؟ ت) کدام فرد وزن بیشتری دارد؟

ث) مقدار میانگین متغیر سوم را بیابید. ج) مقدار میانه متغیر سوم را بیابید.



حل: الف) متغیر اول سن و متغیر دوم قد و متغیر سوم وزن افراد است.

ب) مهدی

پ) حسین

ت) با توجه به شعاع دایره ها وزن حمید از همه بیشتر است.

$$\text{وزن وحید} = \pi r^2 = \pi \times 1 = \pi$$

ث) وزن تک تک افراد را محاسبه میکنیم

$$\text{وزن حمید} = \pi r^2 = \pi \times 16 = 16\pi$$

$$\text{وزن مجید} = \pi r^2 = \pi \times 4 = 4\pi$$

$$\text{وزن حسین} = \pi r^2 = \pi \times 9 = 9\pi$$

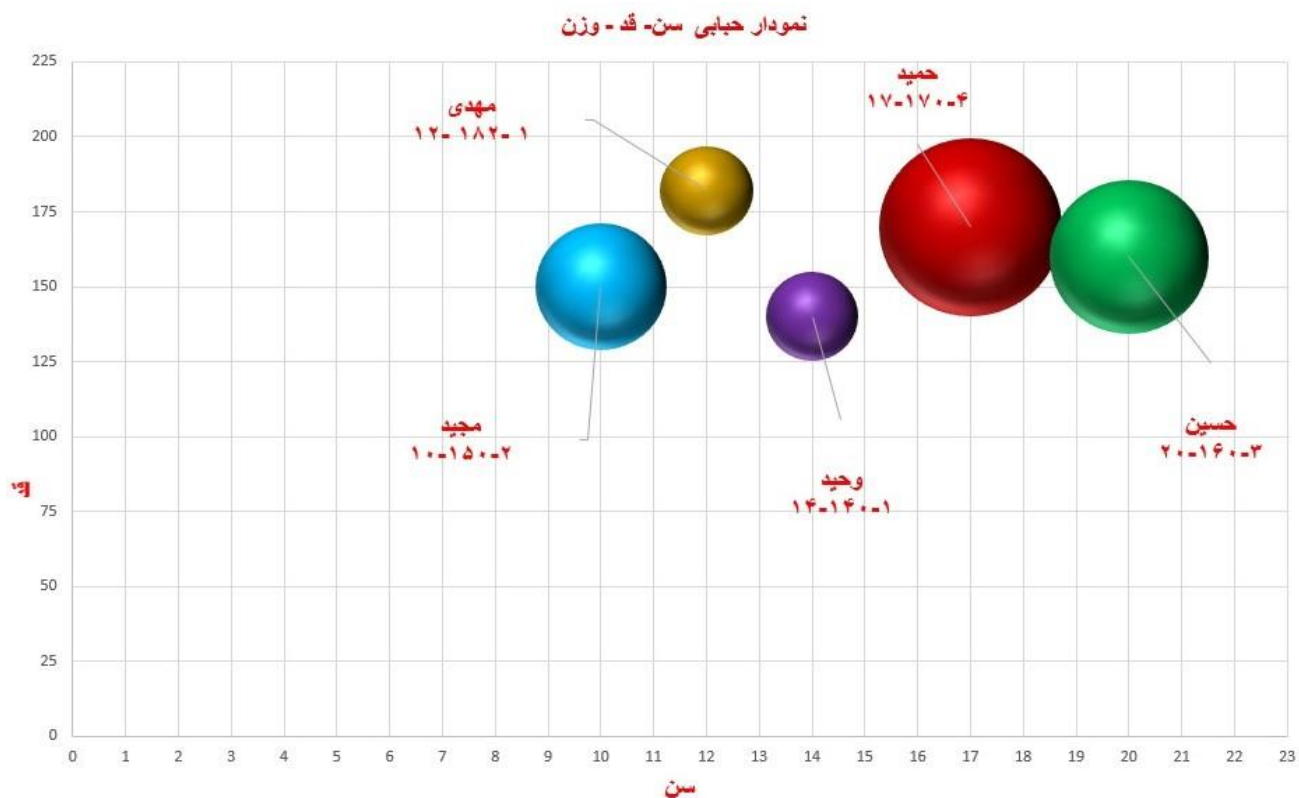
$$\text{وزن مهدی} = \pi r^2 = \pi \times 1 = \pi$$

$$\text{میانگین متغیر سوم} = \frac{\pi + \pi + 4\pi + 9\pi + 16\pi}{5} = 6.2\pi$$

ج) وزن افراد را از کوچک به بزرگ مرتب می کنیم

چون تعداد داده ها فرد است داده وسط میانه است پس 4π میانه است.

نمودار زیباتر رسم شده با اکسل به صورت زیر است.

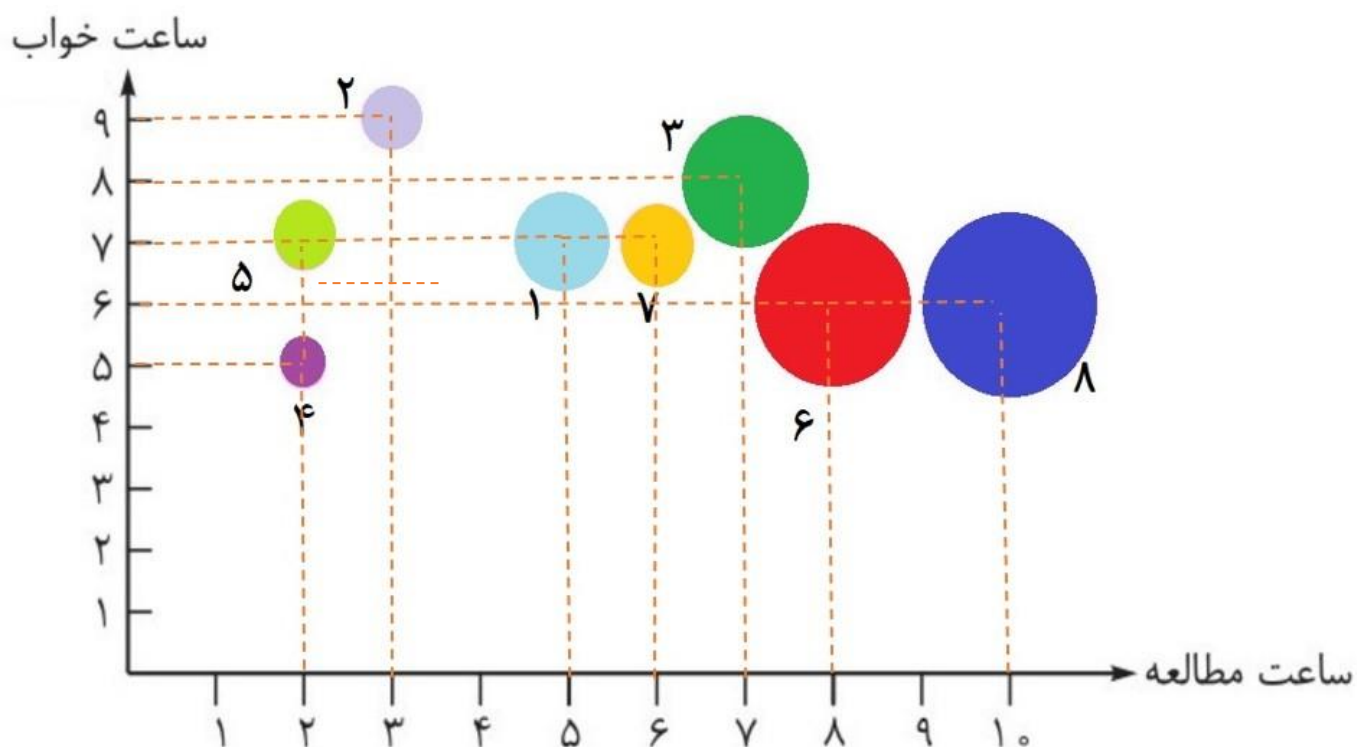


مثال ۶- جدول زیر اطلاعات مربوط به ساعات مطالعه، ساعات خواب و نمره ریاضی ۸ دانش آموز سال دهم را

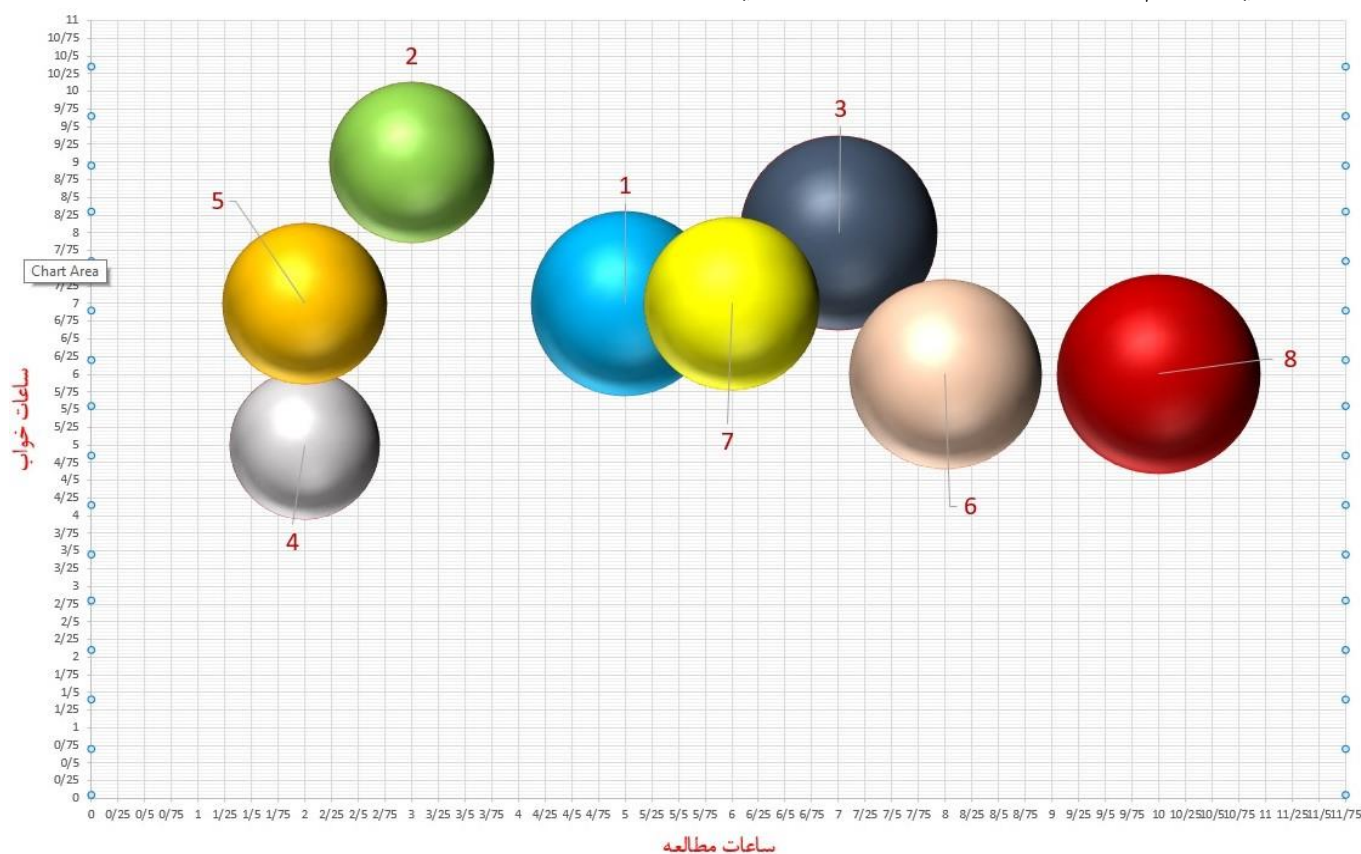
نشان میدهد. نمودار حبابی آن را رسم کنید.

شماره دانش آموز	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
ساعات مطالعه	۵	۳	۷	۲	۲	۸	۶	۱۰
ساعات خواب	۷	۹	۸	۵	۷	۶	۷	۶
نمره ریاضی	۱۷	۱۳	۱۹	۱۱	۱۳	۱۸	۱۵	۲۰

حل: ساعت مطالعه را به عنوان متغیر اول و روی محور افقی در نظر میگیریم ، ساعت خواب را به عنوان متغیر دوم و روی محور قائم در نظر میگیریم و نمره ریاضی را به عنوان متغیر سوم (مساحت دایره ها) در نظر میگیریم اگر دانش آموزان را به ترتیب با شماره های ۱ و ۲ و ... و ۸ در نظر بگیریم نمودار حبابی به صورت زیر خواهد بود:



و نمودار زیباتر رسم شده به کمک اکسل به صورت زیر است:



نمودار راداری (ستاره ای، تار عنکبوتی):

نموداری دو بعدی است که در آن سه متغیر کمی یا بیشتر بر روی محورهای نشان داده میشوند که نقطه شروع همه آنها یکی است.

نکته ۱: نقطه شروع محورها مرکز یا مبدا گفته می شود نمودار راداری از چند خط (به طور دقیقتر: نیمخط) به شکل پره های چرخ دوچرخه تشکیل میشود که در نقطه مرکز به یکدیگر اتصال دارند و با زاویه های یکسان بین هم، گرداگرد آن نقطه قرار گرفته اند. هر کدام از این خطوط در واقع یک محور و نشان دهنده یک متغیر است؛ پس میتواند درجه بندی شود. به این خطوط اصطلاحاً شعاع های نمودار راداری میگویند. محل قرارگیری و زاویه محورها نسبت به یکدیگر، هیچ اطلاعات خاصی را بیان نمیکند.

نکته ۲: رابطه بین زاویه بین محورها (شعاع ها) و تعداد متغیرها از رابطه زیر بدست می آید:

$$\text{زاویه بین شعاع ها} = \frac{360^\circ}{\text{تعداد متغیرها (شعاع ها)}}$$

مثال ۷: اگر بخواهیم نمودار حبابی دلخواهی را به شکل یک نمودار راداری تبدیل کنیم زاویه بین هردو شعاع

متوالی چند درجه خواهد بود؟ $\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$ زاویه بین شعاع ها

مثال ۸: باتوجه به نکته ۲ داریم:

تعداد متغیرها	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
زاویه بین محورها (شعاع ها)	۱۲۰	۹۰	۷۲	۶۰	۵۱.۴	۴۵	۴۰	۳۶	۳۲.۷

طبق جدول اگر تعداد متغیرها ۵ باشد در اینصورت زاویه بین محورها یا شعاع ها برابر ۷۲ درجه و اگر تعداد متغیرها ۶ باشد در اینصورت زاویه بین محورها یا شعاع ها برابر ۶۰ درجه خواهد شد. همچنین اگر زاویه بین محورها یا شعاع ها برابر ۳۶ درجه باشد در اینصورت تعداد متغیرها (شعاع ها) برابر ۱۰ خواهد شد.

مثال ۹: در یک نمودار راداری، اگر به تعداد متغیرها یکی اضافه شود زاویه بین هردو شعاع متوالی ۱۸ درجه کم

می شود نمودار راداری اولیه چند متغیر را نمایش می دهد؟

حل:

روش اول: باتوجه به مثال ۱ نمودار راداری اولیه شامل ۴ متغیر است.

روش دوم: اگر تعداد متغیرهای نمودار راداری اولیه را x فرض کنیم در اینصورت زاویه بین هردو شعاع متوالی برابر $\frac{360^\circ}{x}$ است اگر به تعداد متغیرها یعنی x یک واحد اضافه کنیم تعداد متغیرهای نمودار راداری ثانویه برابر

$\frac{360^\circ}{x+1}$ خواهد شد لذا باتوجه به اطلاعات مسئله داریم $\frac{360^\circ}{x} - \frac{360^\circ}{x+1} = 18$ و با حل این معادله گویا خواهیم داشت $x = 4$

روش رسم نمودار راداری:

۱- باتوجه به تعداد متغیرهای مشخص شده در مسئله، تعداد محورها و زاویه بین محورها را مشخص و محورها را در صفحه رسم می کنیم

۲- سپس محورها را بر حسب درصد درجه بندی می کنیم (اگر متغیرها بر حسب نمره باشند محورها را می توان بر حسب ۲۰ نمره درجه بندی کرد)

۳- بعد از درجه بندی محورها برحسب درصد، مقدار متغیر را روی شعاع مربوطه به کمک رابطه زیر محاسبه می کنیم

$$100 \times \frac{\text{مقدار متغیر در مشاهده مورد نظر}}{\text{بزرگترین مقدار متغیر در کلیه مشاهدات}} = \text{اندازه متغیر بر روی شعاع}$$

۴- بعد از مشخص شدن مقدار هر متغیر روی شعاع مربوطه، نقاط بدست آمده را به هم وصل می کنیم تا نمودار راداری کامل شود.

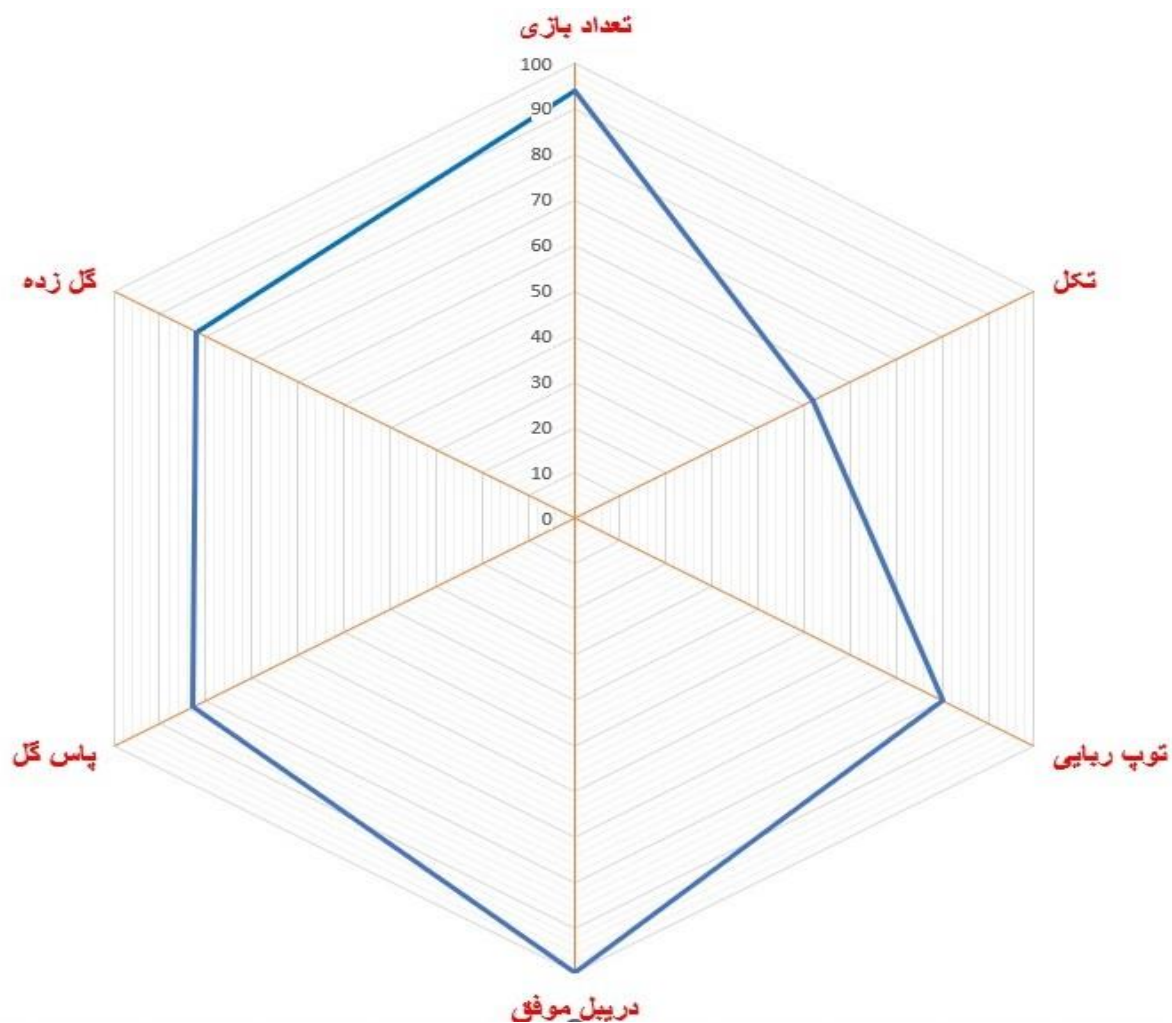
مثال ۱۰: در جدول زیر اطلاعات مربوط به یک بازیکن یک تیم فوتبال و ماکزیمم هر متغیر در یک فصل داده شده است نمودار راداری مربوط به این بازیکن را رسم کنید.

متغیرها	تعداد بازی	گل زده	پاس گل	دریبل موفق	توپ ربایی	تکل
بازیکن مورد نظر	۳۶	۳۳	۸۳	۲۰۰	۱۶	۲۶
مقدار ماکزیمم	۳۸	۴۰	۱۰۰	۲۰۰	۲۰	۵۰

حل: تعداد متغیرها در مسئله ۶ تا است لذا تعداد محورها ۶ و زاویه بین محورها برابر ۶۰ است پس ۶ محور با زاویه بین ۶۰ درجه رسم می کنیم و آنها را برحسب درصد درجه بندی می کنیم

$$\begin{aligned} \text{نسبت متغیر گل زده} &= \frac{33}{40} = 0.825 \\ \text{نسبت متغیر دریبل موفق} &= \frac{200}{200} = 1 \\ \text{نسبت متغیر پاس گل} &= \frac{83}{100} = 0.83 \\ \text{نسبت متغیر تکل} &= \frac{26}{50} = 0.52 \\ \text{نسبت متغیر توپ ربایی} &= \frac{16}{20} = 0.8 \\ \text{نسبت متغیر تعداد بازی} &= \frac{36}{38} = 0.947 \end{aligned}$$

درصد نسبت متغیرها را روی محورها پیدا می کنیم و آنها را به هم وصل می کنیم نمودار راداری رسم شده به کمک اکسل به صورت زیر می باشد.



مثال ۱۱: نمرات ۵ درس دانش آموزی در جدول زیر داده شده است. نمودار راداری آن را رسم کنید.

درس	فارسی	ریاضی	عربی	منطق	جامعه شناسی
نمره	۱۷	۱۴	۱۶	۸	۱۰
بیشینه	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰

حل:

روش اول: تعداد متغیرها در مسئله ۵ تا است لذا تعداد محورها ۵ و زاویه بین محورها برابر ۷۲ درجه است پس ۵ محور با زاویه بین ۷۲ درجه رسم می کنیم و آنها را برحسب درصد درجه بندی می کنیم

$$\frac{۱۶}{۲۰} = ۰.۸۰ = \text{نسبت متغیر درس عربی}$$

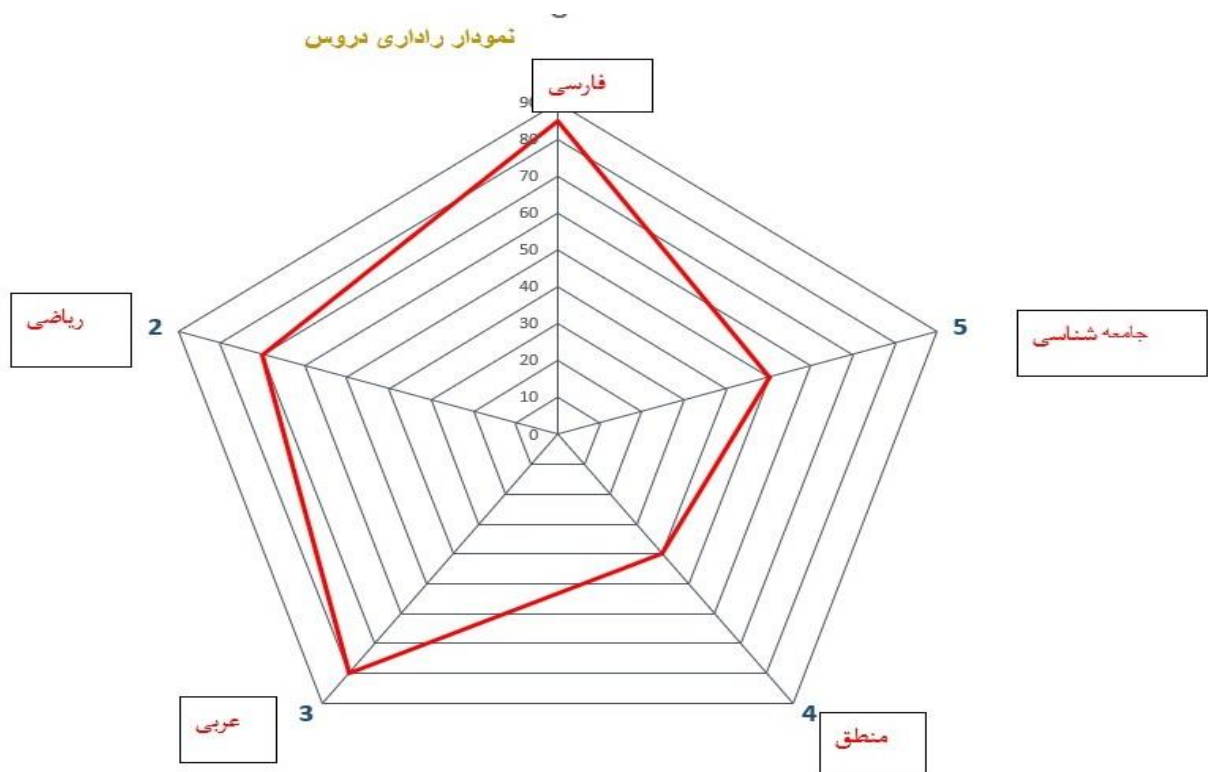
$$\frac{۱۷}{۲۰} = ۰.۸۵ = \text{نسبت متغیر درس فارسی}$$

$$\frac{۸}{۸} = ۱ = \text{نسبت متغیر درس منطق}$$

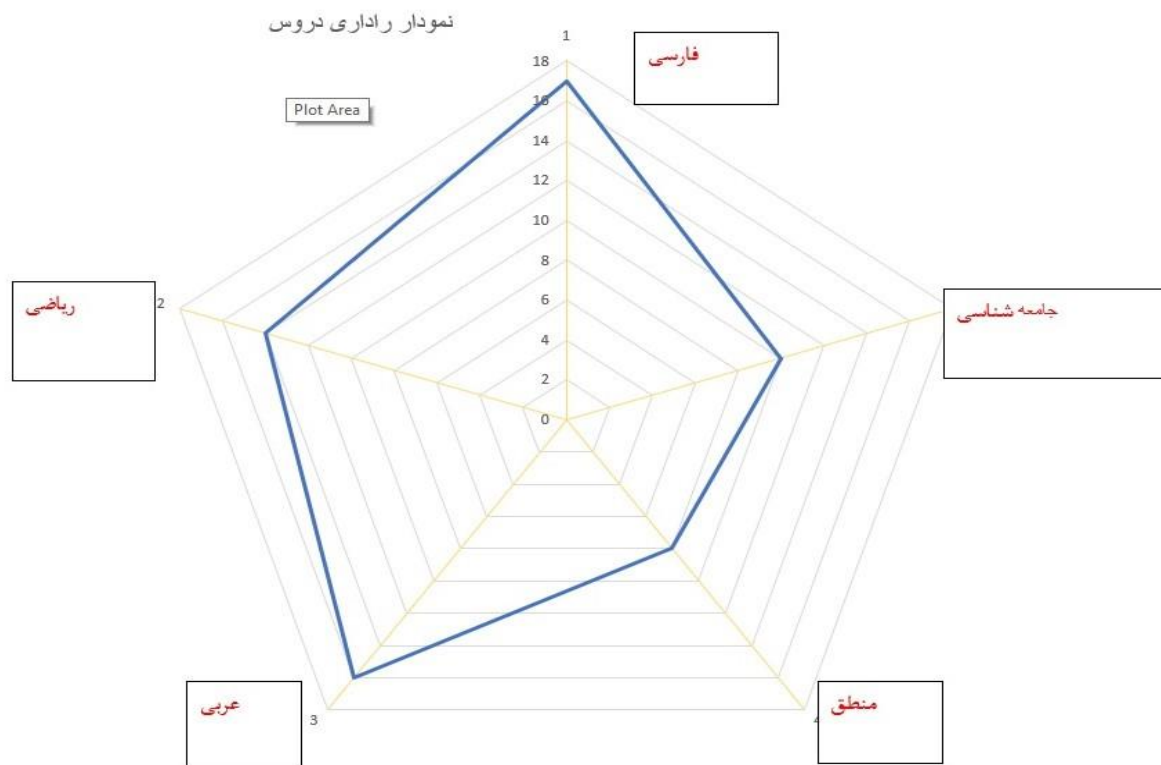
$$\frac{۱۴}{۲۰} = ۰.۷۰ = \text{نسبت متغیر درس ریاضی}$$

$$\frac{۱۰}{۲۰} = ۰.۵۰ = \text{نسبت متغیر درس جامعه شناسی}$$

درصد نسبت متغیرها را روی محورها پیدا می کنیم و آنها را به هم وصل می کنیم نمودار راداری به صورت زیر بدست می آید.



روش دوم: تعداد متغیرها در مسئله ۵ تا است لذا تعداد محورها ۵ و زاویه بین محورها برابر ۷۲ درجه است پس ۵ محور با زاویه بین ۷۲ درجه رسم می کنیم چون بیشینه مقدار نمره در حالت کلی (در سطح دبیرستان) ۲۰ می باشد لذا می توان درجه بندی محورها را از ۲۰ در نظر گرفت



مثال ۱۲: نامزدهای نهایی دریافت جایزه نهایی توپ طلا در سال ۲۰۱۳ میلادی، سه بازیکن A و B و C بودند که در نهایت، جایزه به بازیکن A تعلق گرفت

	توپ ربایی	تکل	پاسهای موفق	پاس طلایی	دریبل موفق	پاس گل	ضربه های گل شده	دقت ضربه	ضربه به سمت دروازه	گل زده	تعداد بازی
A	۰/۳	۰/۴۶	۷۶/۸	۲/۰۵	۱/۸۹	۰/۳۳	۱۴/۵	۴۴/۶	۷/۷۸	۰/۹۳	۳۰/۱
B	۰/۳۴	۰/۶۵	۸۵	۱/۵۸	۴/۱۹	۰/۴۱	۲۸	۴۹/۱	۵/۶	۱/۴۴	۲۹/۱
C	۰/۸۹	۱/۱۵	۸۷/۸	۳/۶۶	۵/۲	۰/۶	۱۵/۳	۴۷/۷	۲/۷۷	۰/۴۳	۲۳/۵
MAX	۶	۶	۹۵	۵	۷	۱	۴۰	۷۵	۸	۱/۶	۳۸

حل: تعداد متغیرها در مسئله ۱۰ تاست لذا تعداد محورها ۱۰ و زاویه بین محورها برابر ۳۶ درجه است پس

۱۰ محور با زاویه بین ۳۶ درجه رسم می کنیم و آنها را برحسب درصد درجه بندی می کنیم همچنین درصد

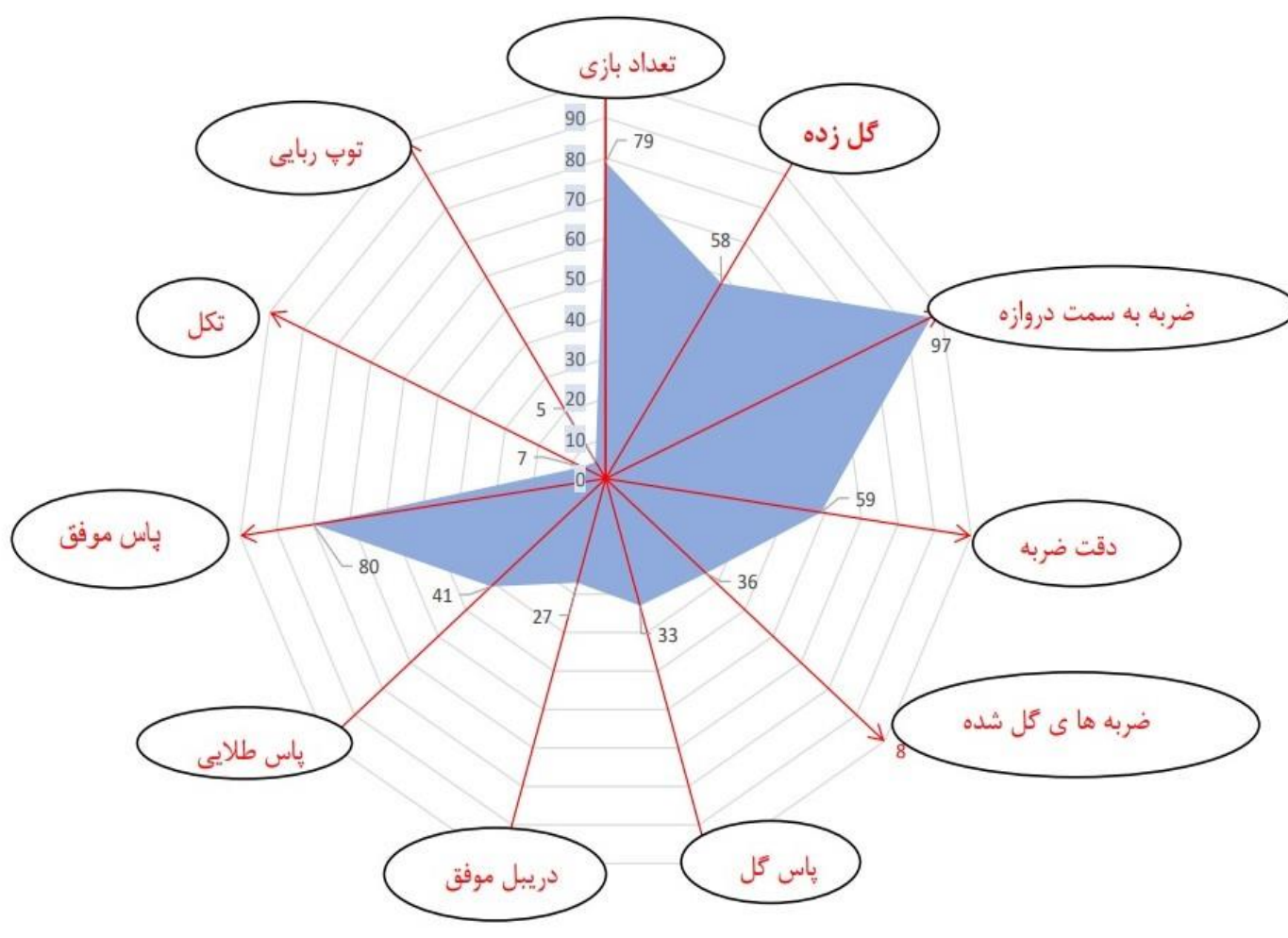
نسبت متغیرها را پیدا و به صورت جدول زیر می نویسیم

	تعداد بازی	گل زده	ضربه به سمت دروازه	دقت ضربه	ضربه های گل شده	پاس گل	دریبل موفق	پاس طلایی	پاسهای موفق	تکل	توپ ربایی
A۱	۷۹	۵۸	۹۷	۵۹	۳۶	۳۳	۲۷	۴۱	۸۰	۷	۵
B۱	۷۶	۹۰	۷۰	۶۵	۷۰	۴۱	۵۹	۳۱	۸۹	۱۰	۵
C۱	۶۱	۲۶	۳۴	۶۳	۳۸	۶۰	۷۴	۷۳	۹۲	۱۹	۱۴

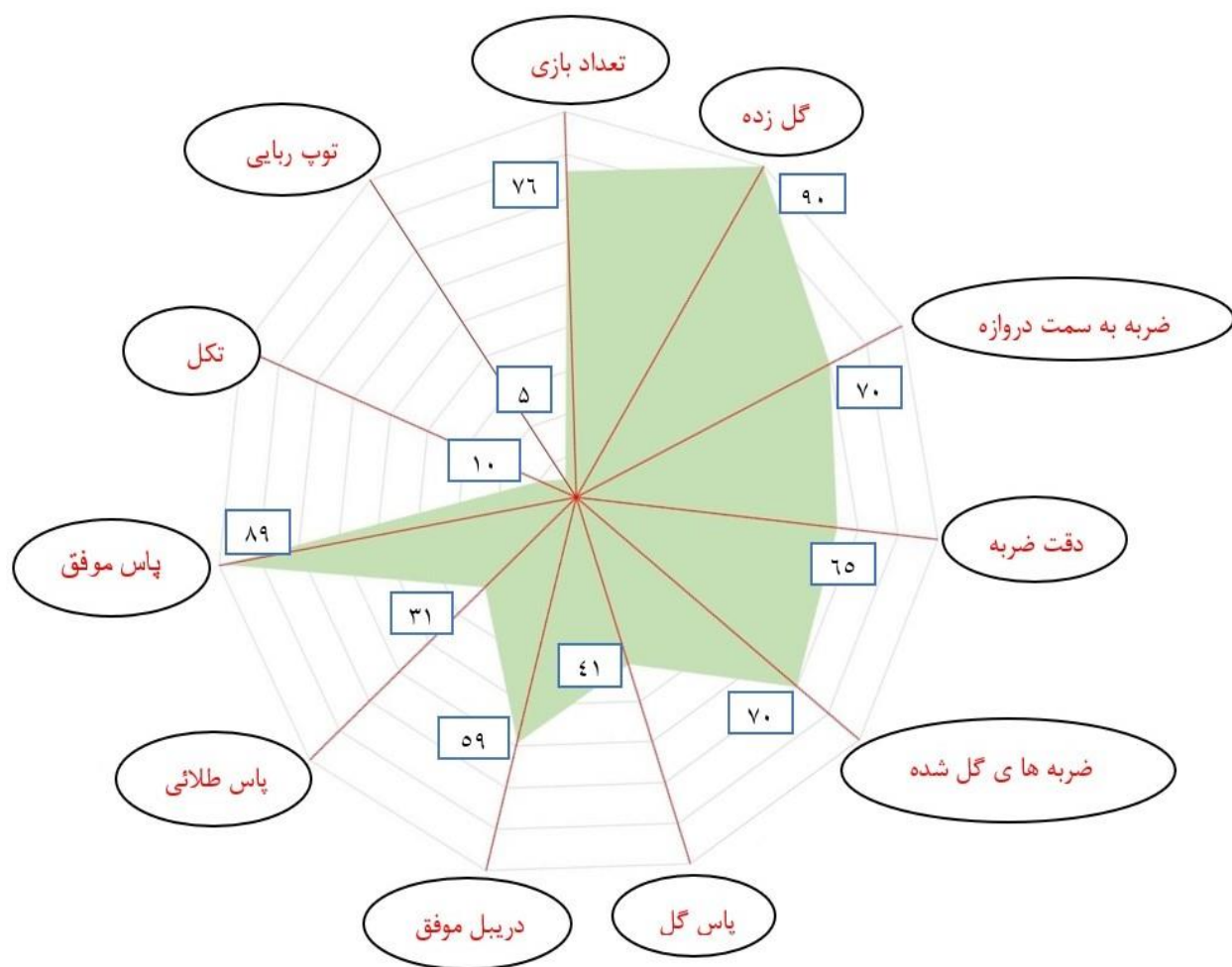
هریک از درصد نسبت های بدست آمده در جدول بالا را روی محور مربوطه مشخص می کنیم و آنها را به هم

وصل می کنیم لذا نمودار راداری برای هریک از بازیکنها بدست می آید.

نمودار راداری بازیکن A به صورت زیر است :



نمودار راداری بازیکن B به صورت زیر است:



تمرین ۲: نمودار راداری بازیکن C را رسم کنید.