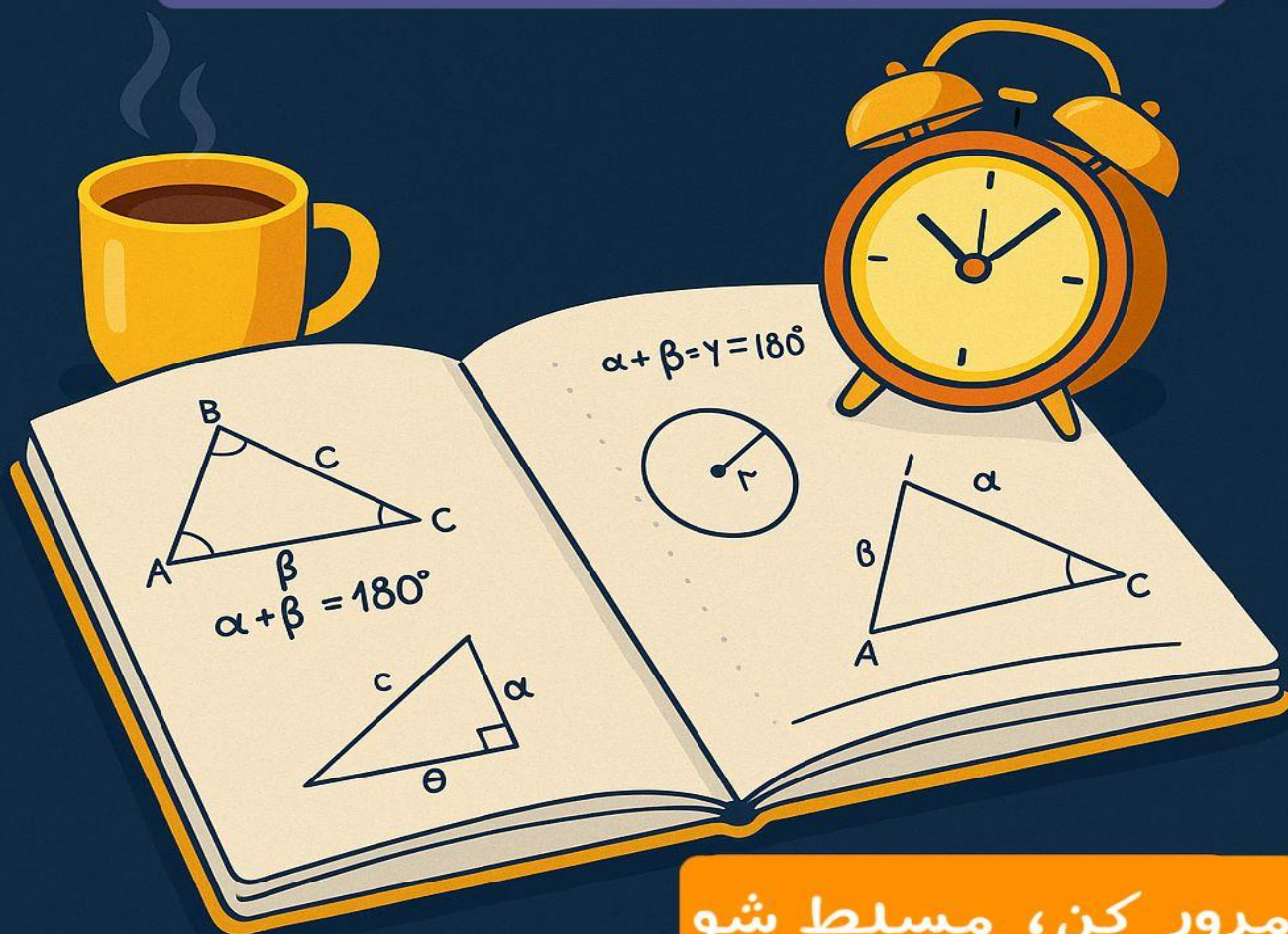


فول مارک هندسه یازدهم

نمره کامل در شب امتحان هندسه ۲



مدرور کن، مسلط شو
بیست بگیر

به نام خدا

این فایل بر اساس محتوای کتاب هندسه ۲ سال یازدهم و با هدف مرور آخر در شب امتحان تهیه شده است. ساختار کتاب بر اساس سه محور اساسی فعالیت، کاردرکلاس و تمرین قرار گرفته است. از این میان «فعالیت ها» موقعیت هایی برای یادگیری و ارائه مفاهیم جدید ریاضی فراهم می کنند.

اما در امتحان، سوالات به صورت انتزاعی مطرح می شوند و گاهی برای دانش آموزان تشخیص سوال سخت می شود. لذا این فایل برای کمک به دانش آموزان تهیه شد و پیشنهاد می شود از این فایل مشابه سوال امتحانی استفاده گردد. در شب امتحان مثل جلسه امتحان کتاب را بسته و از سوالات فایل به عنوان برگه امتحانی استفاده کنید و شروع به نوشتن جواب کنید. بعد از هر صفحه می توانید نوشته های خود را با کتاب مقابله کنید و اشکالات خود را متوجه بشوید و به همین ترتیب ادامه دهید.

همچنین در صفحه آخر فایل لینک تدریس خط به خط هندسه ۲ آورده شده است.

ان شا الله با برنامه ریزی و مطالعه دقیق نمره بیست را در امتحانات نهایی کسب کنید.

رحیمه قربانیان

عضو گروه ریاضی استان آذربایجان شرقی
دبیر ریاضی دبیرستان باقر العلوم ناحیه یک تبریز

فهرست

فصل اول: دایره

اهداف آموزشی	۴
درسنامه	۶
درس اول: مفاهیم اولیه و زاویه ها در دایره	۱۱
درس دوم: رابطه های طولی در دایره	۱۹
درس سوم: چندضلعی های محاطی و محیطی	۲۶
لینک فیلم های آموزشی	۳۶

بسم الله الرحمن الرحيم

فصل ۱

دایره

فصل ۱: دایره (۸ نمره)

اهداف کلی	محتوا	اهداف جزئی	سطوح شناختی مورد انتظار				ملاحظات
			پایان‌دوایی	درک و فهم	کاربرد	تجزیه و تحلیل	
مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره	درس ۱	۱- تعریف دایره را بداند . ۲- مفاهیم اولیه شامل (شعاع، وتر، کمان، قطر، مرکز، محیط، مساحت، قطاع، محاسبه مساحت قطاع با زاویه مشخص و محاسبه طول کمان با زاویه مشخص) را بداند. ۳- وضع نسبی نقطه و دایره را تشخیص دهد. ۴- وضع نسبی خط و دایره را تشخیص دهد. ۵- ویژگی خط مماس بر دایره را بداند و بتواند اثبات کند. ۶- زاویه مرکزی را تشخیص دهد. ۷- زاویه محاطی را تشخیص دهد. ۸- زاویه ظلی را تشخیص دهد. ۹- قضایای مربوط به اندازه هر نوع از زاویه‌ها را بداند و اثبات کند. ۱۰- اندازه زاویه بین دو وتر متقاطع درون و بیرون دایره را پیدا کند و اثبات کند. ۱۱- اندازه زاویه بین وتر دایره و خط مماس بر دایره را پیدا کند و اثبات کند. ۱۲- اندازه کمان‌های محصور بین دو وتر موازی در دایره را پیدا کند و اثبات کند. ۱۳- اندازه کمان‌های محصور بین خط مماس بر دایره و وتر موازی آن را پیدا کند و اثبات کند. ۱۴- ویژگی قطر عمود بر وتر در دایره را بداند و بتواند آن را ثابت کرده، در حل مسائل کاربردی استفاده کند.	●	●	●	۱- سؤال خارج از مفاهیم اشاره شده طراحی نشود. (در حد تمرین‌های کتاب سؤال مناسب است) ۲- در طرح سؤال از الیات قضایایی مشابه زاویه محاطی که الیات در چند حالت است، در صورتی که حالت خاصی مد نظر طراح سؤال هست شکل آن حالت کشیده شود و یا در صورت سؤال ذکر شود. در صورتی که همه حالت‌ها مدنظر هست ذکر شود.	

اهداف کلی	محتوا	اهداف جزئی	سطوح شناختی مورد انتظار				ملاحظات
			پداویری	درک و فهم	کاربرد	تجزیه و تحلیل	
رابطه‌های طولی در دایره	درس ۲	۱- روابط طولی در دایره (بین اندازه وترهای متقاطع در درون یا بیرون دایره و همچنین بین خط مماس بر دایره و یک وتر قاطع) را بتواند محاسبه و اثبات کند. ۲- روش رسم خط مماس بر دایره از یک نقطه بیرون دایره را بداند و بتواند با ارائه دلیل آن را رسم کند. ۳- حالت‌های نسبی دو دایره را بداند. ۴- روش تشخیص حالت نسبی دو دایره به کمک اندازه خط‌المركزین و اندازه شعاع‌های دو دایره را بداند و بتواند حالت نسبی دو دایره را معین کند. ۵- تعریف مماس مشترک دو دایره را بداند. ۶- تعریف وتر مشترک را بداند. ۷- ارتباط وتر مشترک و خط‌المركزین را بداند. ۸- اندازه مماس مشترک دو دایره را با دانستن شعاع‌ها و طول خط‌المركزین محاسبه و اثبات کند. ۹- روش رسم مماس مشترک خارجی دو دایره را بداند و با ارائه دلیل، آن را رسم کند.	●	●	●	●	۱- روش رسم مماس مشترک داخلی دو دایره از اهداف کتاب نیست. ۲- سؤال خارج از مفاهیم اشاره شده طراحی نشود. (در حد تمرین‌های کتاب سؤال مناسب است)

اهداف کلی	محتوا	اهداف جزئی	سطوح شناختی مورد انتظار				ملاحظات
			پایاوری	درک و فهم	کاربرد	تجزیه و تحلیل	
چندضلعی‌های محیطی	درس ۳	۱- تعریف چندضلعی‌های محیطی و محاطی را بداند. ۲- تعریف چندضلعی‌های محیطی و محاطی براساس ویژگی هم‌رسمی نیمسازها و عمودمنصف‌ها را بداند. ۳- تعریف دایره‌های محیطی و محاطی را بداند. ۴- فرمول روابط بین مساحت و محیط و اندازه شعاع دایره محاطی داخلی را بداند، بتواند اثبات کند و در حل مسایل از آنها استفاده کند. ۵- تعریف چندضلعی منتظم را بداند و بتواند ثابت کند که این نوع چندضلعی هم محیطی و هم محاطی است. ۶- ویژگی‌های چهارضلعی محاطی یا محیطی را بداند و بتواند اثبات کند. ۷- ویژگی‌های چهارضلعی محاطی یا محیطی را بتواند در حل مسایل به کار گیرد. ۸- بداند هر مثلث، هم محاطی و هم محیطی است و بتواند ویژگی مرکز دایره محاطی و محیطی مثلث را اثبات کرده، آن را در حل مسایل به کار گیرد. ۹- مفهوم دایره محاطی خارجی مثلث را بداند و ارتباط بین شعاع این دایره با مساحت و محیط مثلث را بداند و بتواند رابطه آن را ثابت کرده، در حل مسایل به کار گیرد.	●	●	●	●	۱- سؤال خارج از مفاهیم اشاره شده طراحی نشود. (در حد تمرین‌های کتاب سؤال مناسب است) ۲- در طرح سؤال از اثبات قضایای دو طرفه، در صورتی که هر دو طرف مد نظر طراح سؤال هست به صورت برجسته بیان شود. ۳- نکات زیادی در تمرینات صفحات ۲۹ و ۳۰ ذکر شده است. حفظ این فرمول‌ها و نکات الزامی نیست و طرح سؤالی که با استفاده از این روابط حل می‌شود مجاز نیست.

رابطه وتر و کمان در دایره:



نام	وترهای برابر	شعاع عمود بر وتر	نامساوی در وترها	وترهای موازی	کوتاه‌ترین و بلندترین وتر گذرنده از نقطه
شکل					
ویژگی	$AB = CD \Leftrightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}$	$AH = BH$ $\widehat{AC} = \widehat{BC}$	$AB > CD \Leftrightarrow h_1 < h_2$	$AB \parallel CD \Leftrightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD}$	AB: کوتاه‌ترین قطر = 2R: بلندترین

انواع زاویه در دایره:



نوع زاویه	مرکزی	مخاطی	ظلی	درونی (برخورد دو وتر درون دایره)	بیرونی (برخورد دو وتر بیرون دایره)
شکل					
رابطه	$\hat{O} = \widehat{AB}$	$\hat{M} = \frac{\widehat{AB}}{2}$	$\hat{M} = \frac{\widehat{MB}}{2}$	$\hat{M} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2}$	$\hat{M} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2}$

روابط طولی در دایره:



یک قاطع و یک مماس	امتداد دو وتر متقاطع بیرون دایره	دو وتر متقاطع درون دایره	شکل
$Y = MA \times MB = MT^2$	$Y = MA \times MB = MC \times MD$	$X = MA \times MB = MC \times MD$	رابطه
$Y = OM^2 - R^2$	$Y = OM^2 - R^2$	$X = R^2 - OM^2$	برحسب فاصله از مرکز

وضعیت دو دایره نسبت به هم:

۴

d فاصله بین مراکز دو دایره و R و R' شعاع های دو دایره هستند.

وضع نسبی	شکل	شرط	تعداد مماس مشترک خارجی	تعداد مماس مشترک داخلی
متخارج		$d > R + R'$	۲	۲
مماس خارج		$d = R + R'$	۲	۱
مقاطع		$ R - R' < d < R + R'$	۲	۰
مماس داخل		$d = R - R' $	۱	۰
متداخل		$d < R - R' $	۰	۰
هم مرکز		$d = ۰$	۰	۰

اندازه مماس مشترک و زاویه بین آن ها:

۵

مماس مشترک خارجی	مماس مشترک داخلی
$TT' = \sqrt{d^2 - (R + R')^2}$	$TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$
$\sin \theta = \frac{R + R'}{d}$	$\sin \theta = \frac{ R - R' }{d}$

محیط و مساحت قطاع



مساحت	محیط	شکل
$\frac{1}{2}R^2\theta$	$2R + R\theta$ بر حسب رادیان	

دایره محیطی و محاطی مثلث (P نصف محیط است)



دایره محاطی خارجی	دایره محاطی داخلی	دایره محیطی	شکل
$r_a = \frac{S}{P - a}$	$r = \frac{S}{P}$	$R = \frac{abc}{4S}$	شعاع

نکته

اگر h ارتفاع مثلث و r شعاع دایره محاطی داخلی و r_a ، r_b و r_c شعاع دایره محاطی خارجی باشند، داریم:

$$۱) \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$$

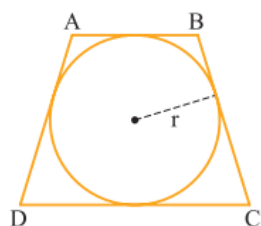
$$۲) \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$$

چهارضلعی محاطی و محیطی



چهارضلعی محاطی	چهارضلعی محیطی	شکل
محل هم‌مرسی عمود منصف اضلاع	محل هم‌مرسی نیم‌سازهای داخلی	مرکز
$\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$	$AB + CD = AD + BC$	ویژگی

● حالت خاص: اگر یک دوزنقه متساوی‌الساقین محیطی باشد، آن‌گاه قطر دایره محاطی، واسطه هندسی بین دو قاعده است:



$$(\sqrt{r})^2 = AB \times CD$$

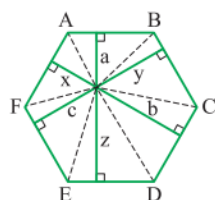
● n ضلعی‌های منتظم:

طول ضلع n ضلعی محاط در دایره	شکل	طول ضلع n ضلعی محیط بر دایره
$AB = \sqrt{R} \sin \theta$	$\theta = \frac{180^\circ}{n}$	$A'B' = \sqrt{R} \tan \theta$

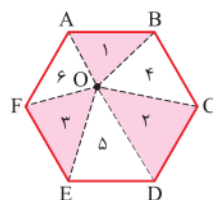
نکته

در شش ضلعی منتظم داریم (O نقطه‌ای دلخواه):

شش ضلعی منتظم



$$a + b + c = x + y + z$$



$$S_1 + S_2 + S_3 = S_4 + S_5 + S_6$$

شکل

رابطه

فصل اول: دایره

درس اول: مفاهیم اولیه و زاویه ها در دایره

جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید تا گزاره ای درست حاصل گردد.

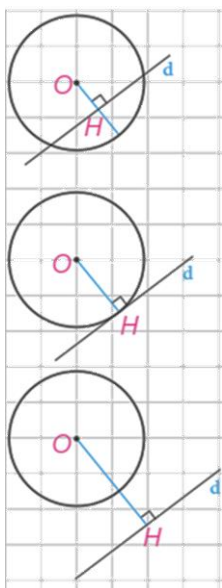
الف) دایره تمام نقاطی از صفحه است که از یک نقطه ثابت به نام در آن صفحه باشند.

ب) اگر نقطه ای مانند A روی دایره $C(O, r)$ باشد، فاصله آن تا مرکز دایره شعاع دایره است.

پ) اگر نقطه ای مانند A بیرون دایره $C(O, r)$ باشد، فاصله آن تا مرکز دایره شعاع دایره است.

ت) اگر نقطه ای مانند A درون دایره $C(O, r)$ باشد، فاصله آن تا مرکز دایره شعاع دایره است.

وضعیت یک دایره و یک نقطه در صفحه آن دایره را با رسم شکل و نوشتن رابطه های آن بنویسید.



اگر d یک خط و $C(O, r)$ یک دایره و نقطه H پای عمودی باشد که از نقطه O به خط d رسم می شود، موارد زیر را کامل کنید.

الف) اگر فاصله خط d از مرکز دایره از شعاع کمتر باشد، $(OH < r)$ خط و دایره نقطه اشتراک دارند؛ یعنی متقاطع اند.

ب) اگر فاصله خط از مرکز دایره با شعاع برابر باشد، $(OH = r)$ خط و دایره نقطه اشتراک دارند؛ یعنی
پ) اگر فاصله خط از مرکز دایره از شعاع بزرگتر باشد، $(OH > r)$ خط و دایره

وضعیت یک دایره و یک خط در صفحه آن دایره را با رسم شکل بنویسید.

ثابت کنید یک خط و دایره بر هم مماس اند اگر و تنها اگر این خط در نقطه تماس با دایره بر شعاع نقطه تماس عمود باشد.

فرض کنید نقطه ای مانند F روی دایره داده شده باشد، روش رسم خط مماس بر دایره را در نقطه F توضیح دهید.

جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید تا گزاره ای درست حاصل گردد.

(الف) پاره خطی را که یک سر آن مرکز دایره و سر دیگر آن نقطه ای روی دایره باشد، می نامند.

(ب) پاره خطی که دوسر آن روی دایره باشد، نام دارد.

(پ) وتر از دایره که از مرکز آن می گذرد را آن دایره می نامند.

(ت) بزرگترین وتر دایره، نام دارد.

(ث) زاویه زاویه ای است که رأس آن بر مرکز دایره واقع باشد.

(ج) زاویه زاویه ای است که رأس آن روی دایره و اضلاع آن شامل دو وتر از دایره باشند.

(چ) دایره شامل دو نقطه روی دایره و تمام نقاط بین آن دو نقطه است.

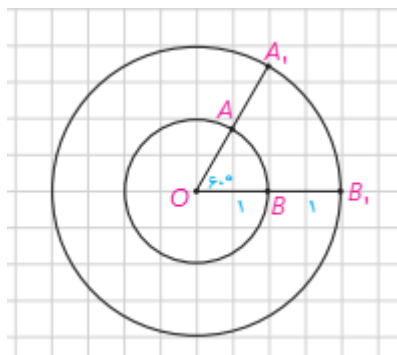
(ح) اندازه کمان، همان اندازه مقابل به آن کمان تعریف میشود و واحد آن است.

(خ) ناحیه ای از درون و روی دایره را، که به دو شعاع دایره و آن دایره محدود است، یک دایره می نامند.

(د) اگر زاویه مرکزی قطاعی از دایره بر حسب رادیان برابر α باشد، طول کمان نظیر این قطاع برابر است با

(ذ) اگر زاویه مرکزی قطاعی از دایره بر حسب درجه برابر α باشد، مساحت قطاع برابر است با

با توجه به شکل، اندازه کمانهای زیر را بنویسید.



$$\frac{\text{اندازه کمان } AB}{360} = \frac{\text{طول کمان } AB}{\text{محیط دایره}}$$

$$\widehat{AB} = \dots^\circ$$

$$\widehat{A_1B_1} = \dots^\circ$$

$$\text{طول } \widehat{AB} = \dots$$

$$\text{طول } \widehat{A_1B_1} = \dots$$

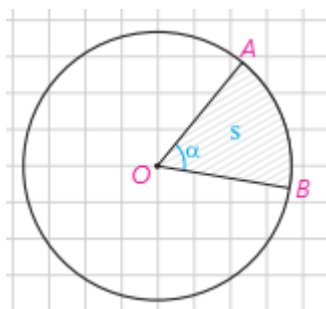
نشان دهید

الف) اگر زاویه مرکزی قطاعی از دایره بر حسب رادیان برابر α باشد، طول کمان نظیر این

$$\text{قطاع برابر است با } L = \frac{\pi R}{180} \alpha$$

ب) اگر زاویه مرکزی قطاعی از دایره بر حسب درجه برابر α باشد، مساحت قطاع برابر است با

$$S = \frac{\pi R^2}{180} \alpha$$



ثابت کنید در یک دایره، کمانهای نظیر دو وتر مساوی، با هم برابرند، و برعکس

ثابت کنید در هر دایره، قطر عمود بر هر وتر، آن وتر و کمان های نظیر آن وتر را نصف می کند. (خ ۴۰۳)

ثابت کنید در هر دایره، خطی که مرکز دایره را به وسط یک وتر از آن دایره که از مرکز دایره نگذشته باشد، وصل کند، بر آن وتر عمود است و کمان نظیر آن را نصف می کند.

ثابت کنید در هر دایره، خطی که مرکز دایره را به وسط کمان نظیر یک وتر از آن دایره وصل می کند بر آن وتر عمود است و آن را نصف می کند.

فرض کنید نقاط وسط وتر AB و کمان AB را داشته باشیم، چگونه می توانیم قطر عمود بر وتر AB را رسم کنیم؟

در هر سه حالت زیر ثابت کنید اندازه هر زاویه محاطی در دایره با نصف کمان روبروی آن برابر است.

الف) زاویه محاطی که یک ضلع آن از مرکز دایره می گذرد.

ب) زاویه محاطی که دو ضلع آن در دو طرف مرکز واقع شده اند.

پ) زاویه محاطی که دو ضلع آن در یک طرف مرکز واقع شده اند.

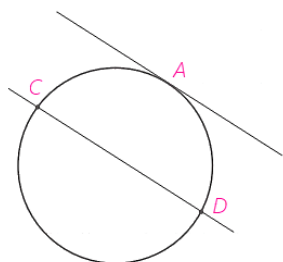
در هر سه حالت که زاویه ظلّی، حاده، قائمه و منفرجه باشد، ثابت کنید اندازه هر زاویه ظلّی، برابر با نصف کمان روبه روی آن است.

نشان دهید دو وتر که یکدیگر را درون دایره قطع نمی کنند با هم موازی اند، اگر و تنها اگر کمانهای محدود بین آنها مساوی باشد.

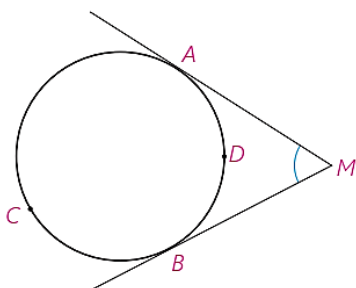
ثابت کنید اندازه زاویه ای که از برخورد امتداد دو وتر از یک دایره پدید می آید، برابر قدرمطلق نصف تفاضل اندازه کمان هایی از آن دایره است که به ضلع های آن زاویه محدودند.

ثابت کنید اندازه زاویه ای که از برخورد دو وتر در یک دایره ایجاد می شود برابر نصف مجموع اندازه دو کمانی از دایره است که به ضلع ها و امتداد ضلع های آن زاویه محدودند.

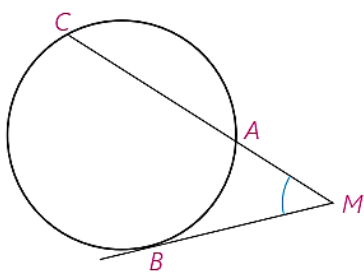
در شکل های زیر ثابت کنید.



الف) $d_1 \parallel d_2$ ، ثابت کنید $\widehat{AC} = \widehat{AD}$

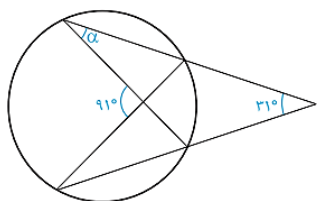


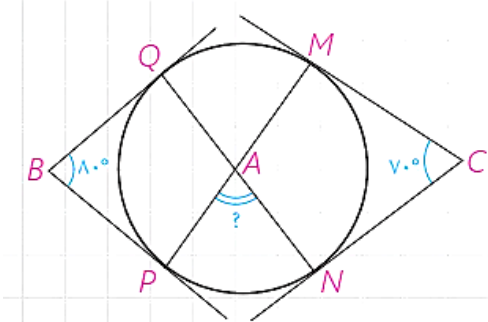
$$\hat{M} = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{ADB}}{2} \quad \text{ب)}$$



$$\hat{M} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AB}}{2} \quad \text{پ)}$$

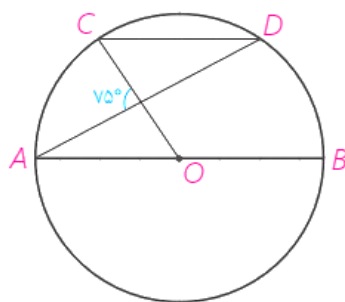
در شکل مقابل اندازه زاویه α را به دست آورید.



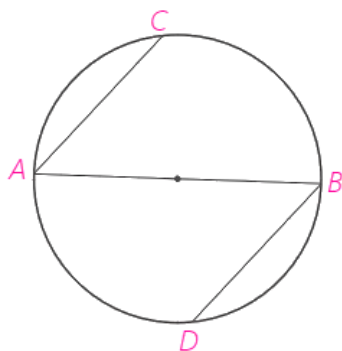


در شکل اضلاع زاویه های B و C بر دایره مماس اند. اندازه زاویه A چند درجه است؟

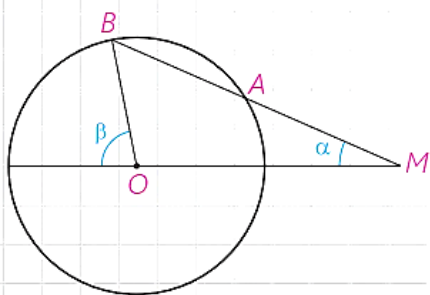
در دایره رسم شده شکل مقابل $CD \parallel AB$ ، اندازه کمان CD را به دست آورید.



در شکل مقابل، AB قطری از دایره است و وترهای AC و BD موازی اند. ثابت کنید: $AC = BD$

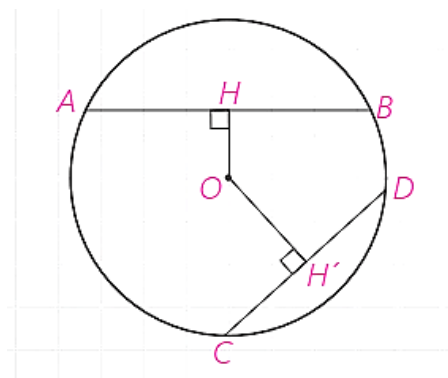


دایره $C(O, r)$ مفروض است. از نقطه M در خارج دایره خطی چنان رسم کرده ایم که دایره را در دو نقطه A و B قطع کرده است و $MA = R$ ؛ نشان دهید: $\beta = 3\alpha$.



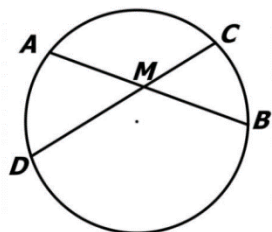
در دایره $C(O, r)$ ، $\widehat{AB} = 60^\circ$ و $AB = 10$ فاصله O از وتر AB را به دست آورید.

در دایره $C(O, r)$ ، نشان دهید اگر $AB > CD$ اگر و تنها اگر $OH < OH'$.



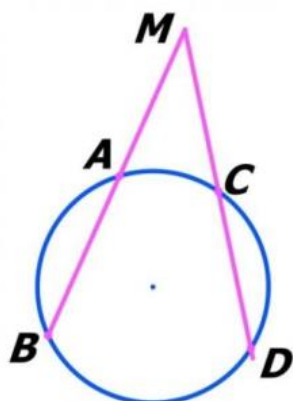
درس دوم: رابطه های طولی در دایره

قضیه: نشان دهید هرگاه خطهای شامل دو وتر دلخواه AB و CD در نقطه ای مانند M در درون دایره یکدیگر را قطع کنند. آنگاه حاصل ضرب قطعات یک وتر برابر است با حاصلضرب قطعات روی وتر دیگر.



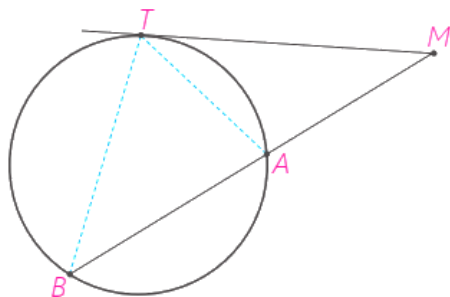
$$MA \times MB = MC \times MD$$

قضیه: نشان دهید هرگاه خطهای شامل دو وتر دلخواه AB و CD در نقطه ای مانند M در بیرون دایره یکدیگر را قطع کنند. آنگاه حاصل ضرب قطعات یک وتر برابر است با حاصلضرب قطعات روی وتر دیگر. (خ ۴۰۳)



$$MA \times MB = MC \times MD$$

قضیه: هرگاه M نقطه ای بیرون دایره باشد و از M مماس و قاطعی نسبت به دایره رسم کنیم، مربع اندازه مماس برابر است با حاصلضرب اندازه های دو قطعه قاطع. $MT^2 = MA \times MB$.
یعنی طول مماس واسطه هندسی بین دو قطعه قاطع است.

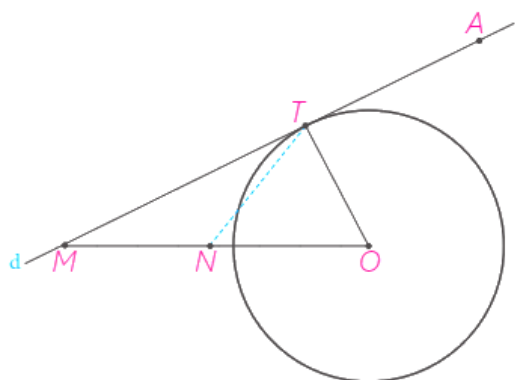


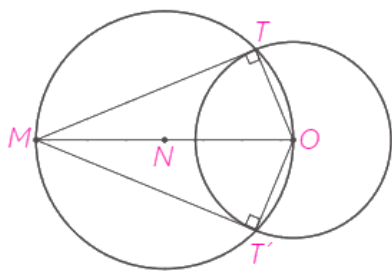
اگر خط d در نقطه T بر دایره مماس باشد و A و M دو نقطه بر خط d در دو طرف نقطه T باشد، هرکدام از پاره خطهای MT و AT بر دایره مماس اند.

اگر O مرکز دایره باشد، $\triangle OMT$ در رأس T قائم الزویه است؛ چرا؟

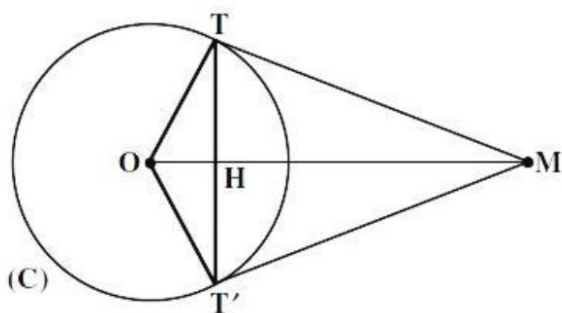
اگر N وسط پاره خط OM باشد، $NM = NO = NT$ ؛ چرا؟

بنابراین دایره به مرکز N و قطر OM از نقطه T میگذرد.





طریقه رسم مماس بر دایره از نقطه M خارج دایره بر آن را بیان کنید.



هرگاه از نقطه M خارج دایره $C(O, R)$ دو مماس بر دایره رسم کنیم و
 T و T' نقاط تماس باشند، ثابت کنید:
 الف) اندازه های دو مماس برابرند.

ب) نیم خط MO نیمساز زاویه TMT' است.

پ) نیم خط MO عمودمنصف TT' است.

$$OM \times OH = R^2 \text{ (ت)}$$

$$TT'^2 = 4OH \times MH \text{ (ث)}$$

$$TT' \times OM = 2R \times MT \text{ (ج)}$$

هرگاه d خط المکزین دو دایره به شعاع های R و R' باشد، وضعیت دو دایره در سمت چپ را به مورد مربوط به آن در سمت راست وصل کنید.

۱) دو دایره متخارج

الف) $d < |R - R'|$

۲) دو دایره متداخل

ب) $d > R + R'$

۳) دو دایره مماس بیرونی

ج) $|R - R'| < d < R + R'$

۴) دو دایره متقاطع

د) دارای ۱ مماس مشترک

هـ) دارای ۳ مماس مشترک

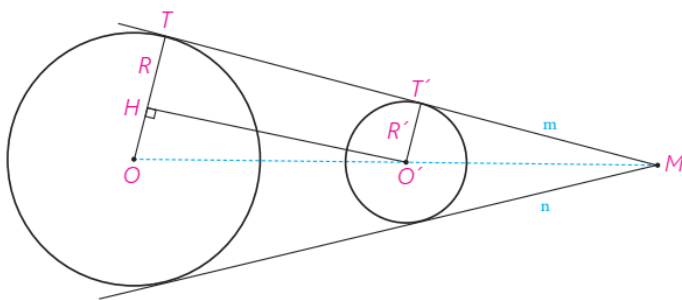
الف) دو دایره متقاطع مماس مشترک دارند.

ب) اگر مراکز دو دایره مماس در یک طرف خط مماس باشند، آنها را مماس گویند.

پ) هر خطی یا پاره خطی که بر هر دو دایره مماس باشد، دو دایره است.

ت) اگر دو دایره در دو طرف خط مماس باشند آن را می نامند.

ث) اگر از نقطه ای خارج دایره دو مماس بر دایره رسم کنیم، اندازه های دو مماس



فرض کنیم مانند شکل خط m در نقاط T و T' بر دو دایره مماس است و شعاعهای OT و $O'T'$ رسم شده است. فرض کنیم فاصله بین مرکزهای دو دایره برابر d باشد؛ از O' خطی موازی خط m رسم میکنیم تا شعاع OT را در نقطه ای مانند H قطع کند. الف) $TT'O'H$ مستطیل است؛ چرا؟

ب) با توجه به قضیه فیثاغورس در مثلث $O'HO$ تساوی زیر را توجیه کنید.

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$$

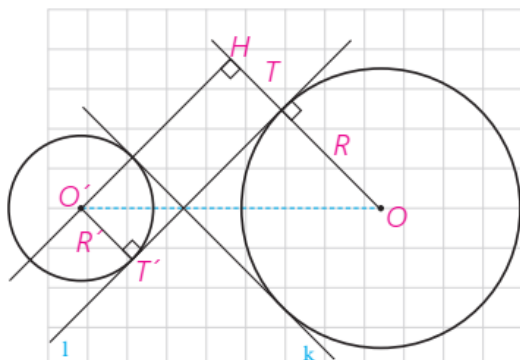
پ) چرا اگر دو مماس مشترک m و n متقاطع باشند، نقطه تقاطع آنها روی خط OO' خواهد بود؟

ت) به مرکز O و به شعاع $R - R'$ دایره ای رسم کنید. پاره خط $O'H$ برای دایره رسم شده چگونه خطی است؟

فرض کنید دو دایره داده شده است. نحوه رسم مماس مشترک خارجی را بیان کنید.

دو مماس مشترک داخلی l و k بر دو دایره متخارج مطابق شکل رسم شده است. با به کار بردن قضیه فیثاغورس در مثلث $O'O'H$ نشان دهید:

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R + R')^2}$$

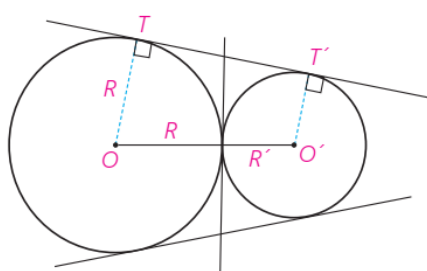


دو دایره را که فقط یک نقطه مشترک داشته باشند، می نامند.

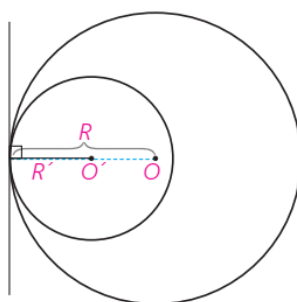
در این نقطه مشترک یک خط بر هر دو مماس است.

اگر مرکزهای دو دایره در دوطرف این مماس باشند، آن دو دایره، است و

اگر هر دو مرکز در یک طرف این مماس باشند، آنها را می نامند.



مماس خارج اند؛
سه مماس مشترک دارند.
 $OO' = R + R'$

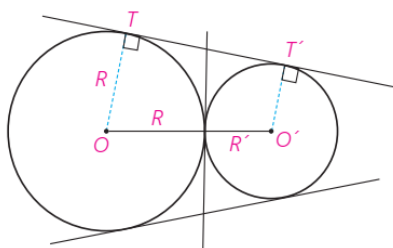


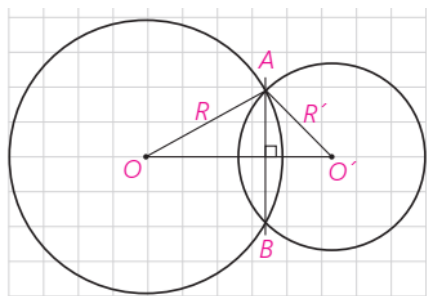
مماس داخل اند؛
فقط یک مماس مشترک دارند.
 $OO' = |R - R'|$

با استفاده از دستور محاسبه طول مماس مشترک خارجی،

نشان دهید در دو دایره مماس خارج

$$TT' = 2\sqrt{RR'}$$



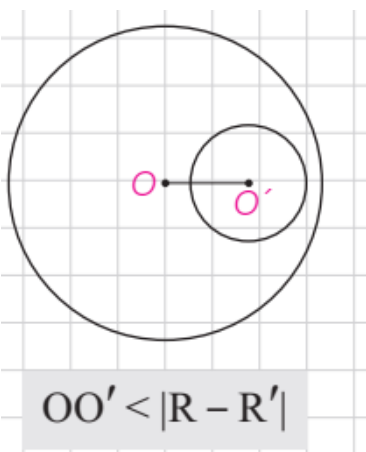


دو دایره را که دو نقطه مشترک داشته باشند، متقاطع می نامند.

در این حالت دو دایره، فقط دو مماس مشترک دارند.

$$|R - R'| < OO' < R + R'$$

پاره خط AB که دوسر آن روی هر دو دایره است، وتر مشترک دو دایره متقاطع است. چرا پاره خط OO' عمودمنصف وتر مشترک AB است؟



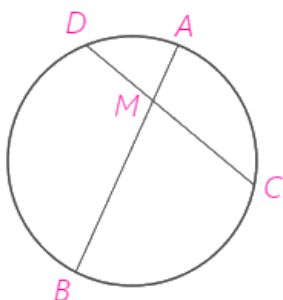
دو دایره را که تمام نقاط یکی درون دیگری باشد، متداخل می نامیم.

دو دایره متداخل هیچ مماس مشترک ندارند و در آنها

$$OO' < |R - R'|$$

در دایره $C(O, R)$ وتر AB ، وتر CD به طول ۹ سانتیمتر را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است.

اگر $AB = ۱۱\text{ cm}$ ، آنگاه وتر CD وتر AB را به چه نسبتی قطع میکند؟

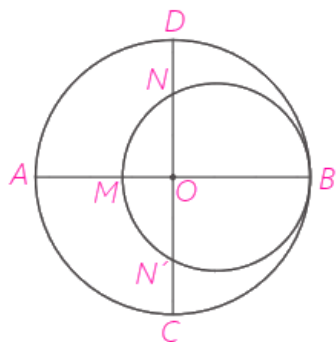


از نقطه P در خارج دایره ای، مماس PA به طول $۱۰\sqrt{3}$ را بر آن رسم کرده ایم. (A روی دایره است).

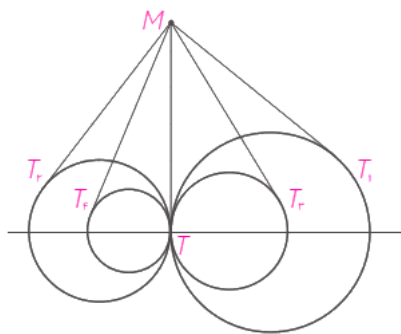
همچنین خطی از P گذرانده ایم که دایره را در دو نقطه B و C قطع کرده است و $BC = ۲۰$.

طول PB و PC را به دست آورید.

در شکل مقابل، دو دایره برهم مماس و دو قطر AB و CD از دایره بزرگتر برهم عمودند. اگر $AM = ۱۶$ و $ND = ۱۰$ ، شعاعهای دو دایره را پیدا کنید.



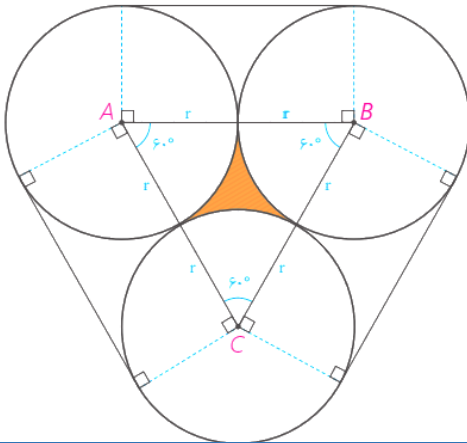
مطابق شکل مقابل، تمام دایره ها در نقطه T برهم مماس اند و از نقطه M روی مماس مشترک آنها بر دایره ها مماس رسم کرده ایم؛ ثابت کنید
 $MT_1 = MT_2 = MT_3 = MT_4 = \dots$



طول شعاعهای دو دایره متخارج را به دست آورید که طول مماس مشترک خارجی آنها مساوی $۳\sqrt{۷}$ و طول مماس مشترک داخلی آنها $\sqrt{۱۵}$ و طول خط المרכזین آنها مساوی ۸ واحد است.

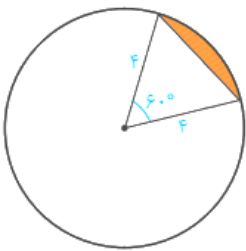
سه دایره به شعاع های برابر r دو به دو برهم مماس اند. مطابق شکل مقابل این سه دایره به وسیله نخ بسته شده اند. نشان دهید طول این نخ برابر $6r + 2\pi r$ است.

همچنین نشان دهید مساحت ناحیه محدود به سه دایره برابر $r^2 \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{4} \right)$ است.



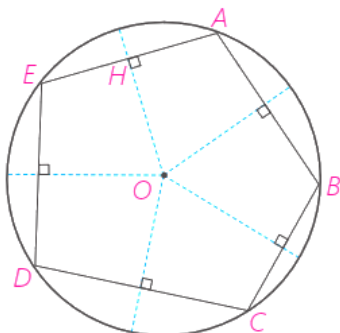
طول خط المکزین دو دایره مماس درونی ۲ سانتی متر و مساحت ناحیه محدود بین آنها 16π سانتی مترمربع است. طول شعاع های دو دایره را به دست آورید.

مطابق شکل در دایره به شعاع ۴، مساحت ناحیه سایه زده را محاسبه کنید. این ناحیه، یک قطعه دایره نام دارد.

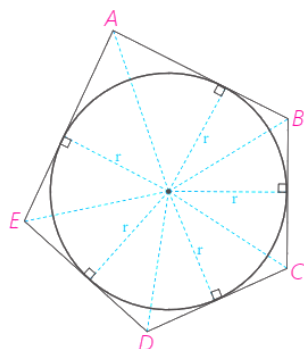


درس سوم: چندضلعی های محاطی و محیطی

چند ضلعی را می گوییم اگر و فقط اگر دایره ای باشد که از همه رئوس آن بگذرد؛ در این صورت دایره را دایره آن چند ضلعی می نامیم.
یک چند ضلعی، است اگر و فقط اگر عمود منصف های همه ضلع های آن در یک نقطه هم رس باشند.
این نقطه مرکز دایره محیطی چند ضلعی است.

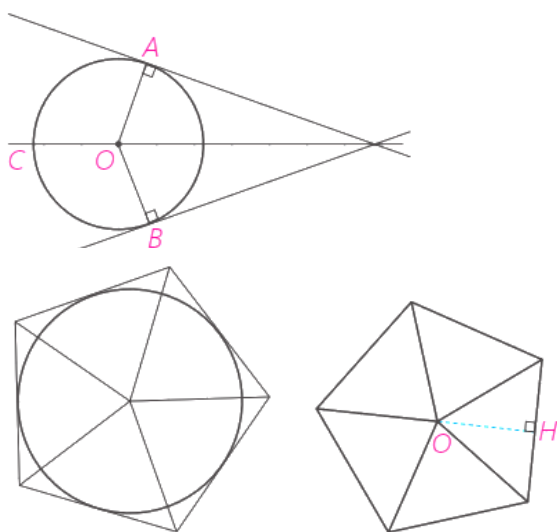


چند ضلعی را میگوییم اگر و فقط اگر دایره ای باشد که بر همه ضلعهای آن مماس باشد؛ در این صورت دایره را دایره این چند ضلعی می نامیم.
یک چند ضلعی، است اگر و فقط اگر همه نیمسازهای زاویه های آن در یک نقطه هم رس باشند.
این نقطه مرکز دایره محاطی چند ضلعی است.

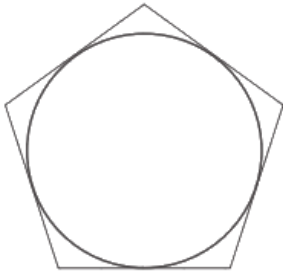


نشان دهید یک چندضلعی محاطی است اگر و تنها اگر عمودمنصف های همه ضلع های آن در یک نقطه هم رأس باشند.

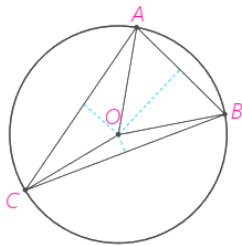
نشان دهید یک چند ضلعی، محیطی است اگر و فقط اگر همه نیمسازهای زاویه های آن در یک نقطه هم رس باشند.



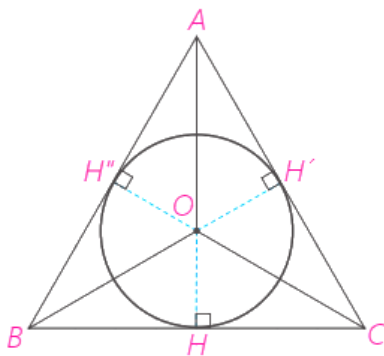
اگر در یک n ضلعی محیطی با مساحت S و محیط P شعاع دایره محاطی برابر r باشد، نشان دهید $S = rP$.



نشان دهید مثلث هم محاطی و هم محیطی است.



$$OA=OB=OC=R$$



$$OH=OH'=OH''=r$$

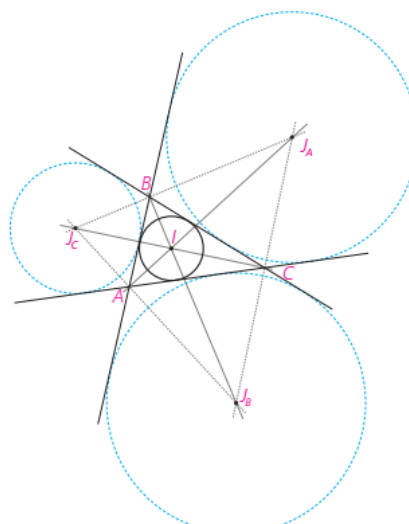
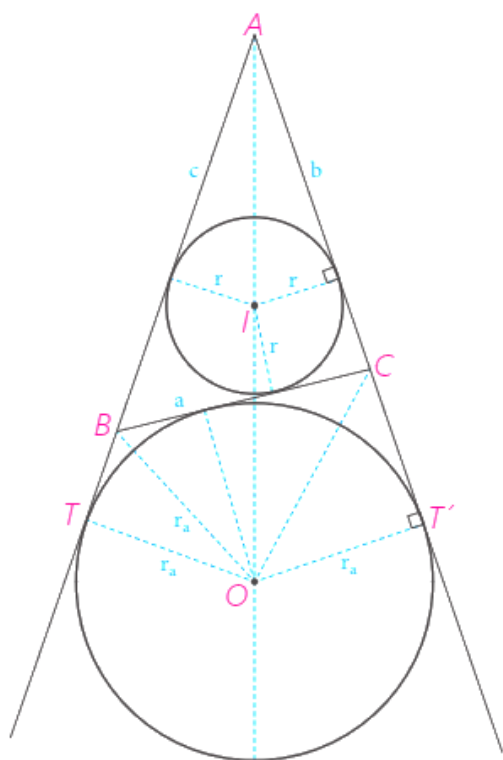
اگر نیمساز زاویه A از مثلث ABC را رسم کنیم، نیمساز زاویه خارجی C را در نقطه ای مانند O قطع میکند. این نقطه از خط BC و خط های AC و AB به یک فاصله است؛ چرا؟

بنابراین O نیز مرکز دایره ای است که بر ضلع BC و خطهای شامل دو ضلع دیگر مماس است.

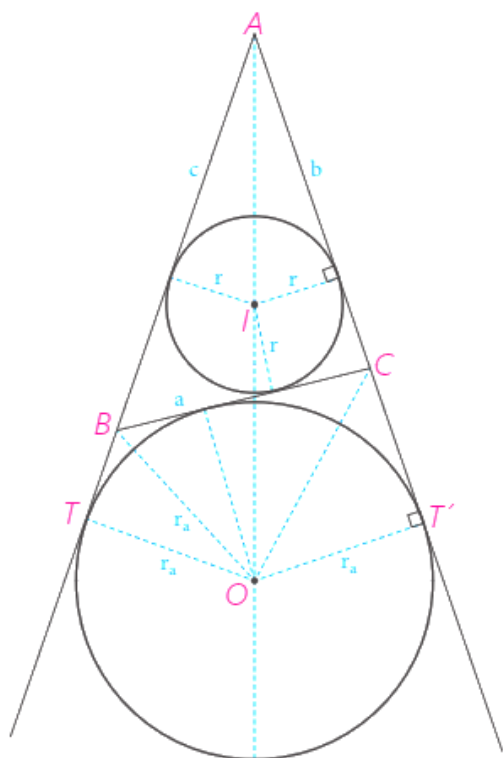
این دایره را دایره محاطی خارجی نظیر رأس A می نامند.

شعاع این دایره را با r_a نشان میدهند؛

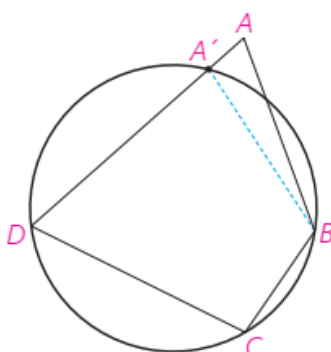
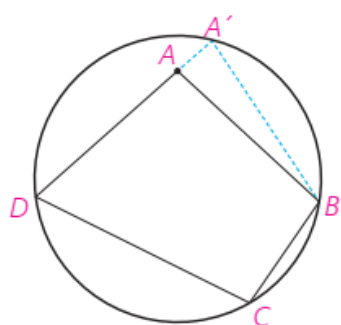
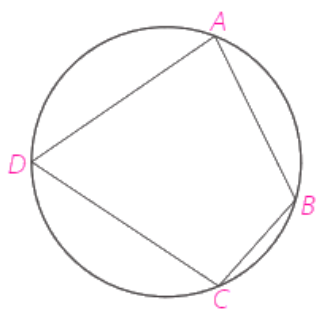
به همین ترتیب دو دایره محاطی خارجی دیگر نظیر دو رأس B و C وجود دارد.



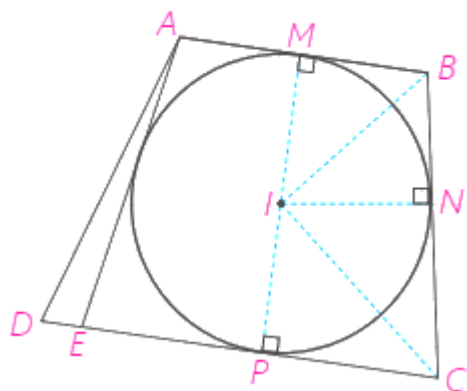
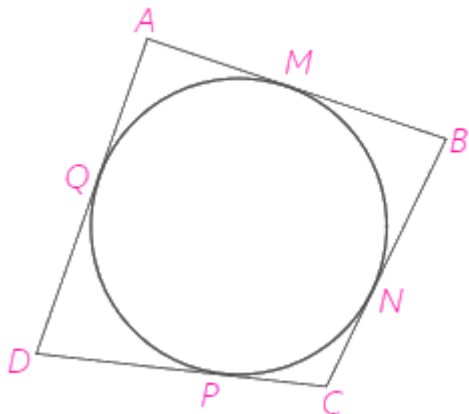
شعاع دایره محاطی خارجی مثلث را محاسبه کنید.



قضیه: یک چهار ضلعی محاطی است، اگر و فقط اگر دو زاویه مقابل آن مکمل باشند.



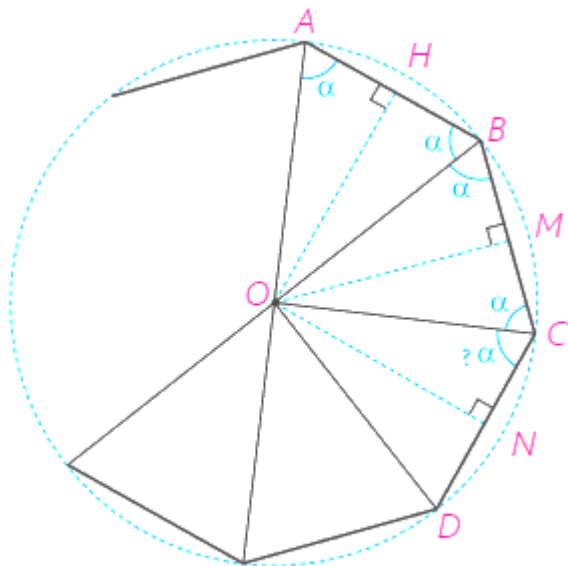
قضیه: یک چهارضلعی محیطی است اگر و فقط اگر مجموع اندازه های دو ضلع مقابل، برابر مجموع اندازه های دو ضلع دیگر باشند.



جدول زیر را کامل کنید.

کایت	متساوی الساقین	ذوزنقه	متوازی الاضلاع	لوزی	مستطیل	مربع	
...	...	...	...	...	...	✓	محاطی
...	...	...	...	...	...	✓	محیطی

یک چند ضلعی محدب را منتظم می نامند، هرگاه تمام ضلعهای آن هم اندازه و تمام زاویه های آن نیز هم اندازه باشند.
 مثلث متساوی الاضلاع سه ضلعی منتظم و مربع چهارضلعی منتظم است.
 از دیگر چندضلعی های محاطی و محیطی، چند ضلعی های منتظم است.



نشان دهید هر چندضلعی منتظم، هم محاطی و هم محیطی است.

ثابت کنید یک دوزنقه، محاطی است، اگر و تنها اگر متساوی الساقین باشد.

مساحت مثلث متساوی الاضلاعی را به دست آورید که در دایره ای به شعاع R محاط شده باشد.

ثابت کنید عمود منصف یک ضلع هر مثلث و نیمساز زاویه مقابل به آن ضلع، یکدیگر را روی دایره محیطی مثلث قطع می کنند.

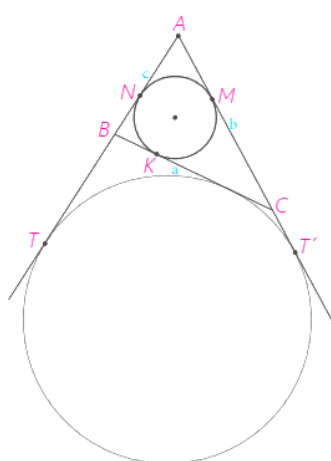
یک دوزنقه، هم محیطی است و هم محاطی. ثابت کنید مساحت این دوزنقه برابر است با میانگین حسابی دو قاعده آن ضرب در میانگین هندسی آنها.

اگر r_a, r_b, r_c شعاع های سه دایره محاطی خارجی مثلث و r شعاع دایره محاطی داخلی باشد، نشان دهید.

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$$

به همین ترتیب اگر h_a, h_b, h_c اندازه های سه ارتفاع باشند، نشان دهید:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$$



اگر نقاط تماس دایره محاطی داخلی مثلث ABC با اضلاع آن M, N و K باشند و T' و T نقطه های تماس یک دایره محاطی خارجی با خط های شامل دو ضلع باشند، نشان دهید

$$AM = AN = P - a$$

$$BN = BK = P - b$$

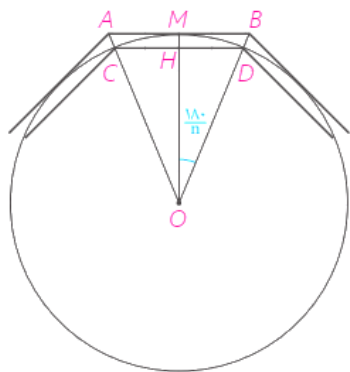
$$CM = CK = P - c$$

$$AT = AT' = P$$

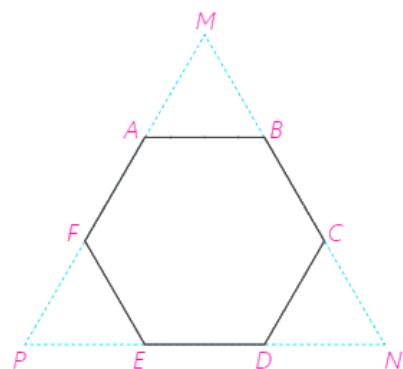
یک دایره به شعاع r و n ضلعی های منتظم محاطی و محیطی در آن در نظر بگیرید.
 نشان دهید اگر AB و CD اندازه های ضلع های n ضلعی منتظم محیطی و محاطی باشند، آنگاه

$$AB = 2r \tan \frac{180}{n}$$

$$CD = 2r \sin \frac{180}{n}$$



شش ضلعی منتظم $ABCDEF$ مفروض است. با امتداد دادن اضلاع شش ضلعی، مطابق شکل، مثلث MNP را ساخته ایم.
 الف) نشان دهید MNP متساوی الاضلاع است.



ب) نشان دهید مساحت شش ضلعی، دو سوم مساحت مثلث MNP است.

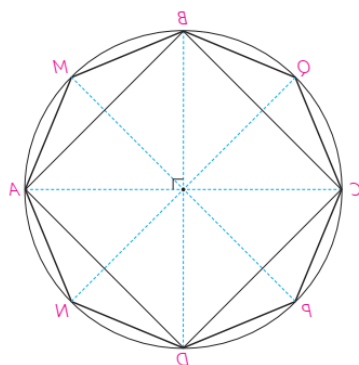
پ) از نقطه دلخواه T درون شش ضلعی عمودهای TH ، TH' و TH'' را به ترتیب بر BC ، ED و AF رسم کنید.

با توجه به آنچه از هندسه پایه ۱ می دانید، مجموع طولهای این سه عمود با کدام جزء از مثلث MNP برابر است؟

ت) مجموع مساحت های مثلثهای TBC ، TDE و TAF چه کسری از مساحت مثلث MNP است؟

نشان دهید:

$$S_{TBC} + S_{TDE} + S_{TAF} = S_{TAB} + S_{TEF} + S_{TCD}$$



دو قطر عمود بر هم AC و BD از یک دایره را رسم می کنیم؛ چهارضلعی $ABCD$ یک مربع است؛ چرا؟

عمود منصف های ضلع های این مربع را رسم کنید تا دایره را قطع کنند. نشان دهید هشت ضلعی $AMBQCPDN$ منتظم است.

خرداد ۱۴۰۳

الف) هر چندضلعی منتظم، هم محاطی و هم محیطی است. (درست - نادرست)

ب) طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس برون به شعاع های R و R' برابر $TT' = 2\sqrt{R + R'}$ است. (درست - نادرست)

پ) اندازه هر زاویه ضلعی، برابر است با اندازه کمان روبه به آن زاویه.

ت) اگر r_a, r_b, r_c شعاع های سه دایره محاطی خارجی مثلث و شعاع دایره محاطی داخلی آن برابر ۴ باشد، حاصل $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$ برابر است.

خرداد ۱۴۰۳

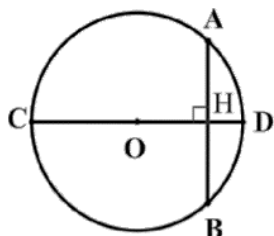
ثابت کنید هرگاه خط های شامل دو وتر دلخواه AB و CD در نقطه ای مانند M در بیرون دایره یکدیگر را قطع کنند. آن گاه $MA \times MB = MC \times MD$

خرداد ۱۴۰۳

ثابت کنید اگر یک چهارضلعی محاطی باشد، آن گاه دو زاویه مقابل آن مکمل هستند.

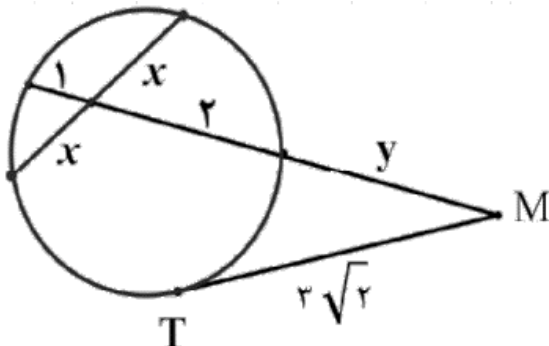
خرداد ۱۴۰۳

در شکل مقابل وتر AB بر قطر CD عمود است. ثابت کنید قطر CD وتر AB و کمان AB را نصف می کند.



در مثلث قائم الزاویه ای با اضلاع زاویه قائمه ۳ و ۴ شعاع دایره محاطی داخلی را محاسبه کنید.

در شکل زیر MT به طول $3\sqrt{2}$ مماس بر دایره است. مقادیر عددی x و y را به دست آورید.



تدریس درس اول بخش اول

<https://s14.picofile.com/d/8408020476/3047678-c711-d211-8e91-73b4bef032e3/Hendeseh211.mp4>

تدریس درس اول بخش دوم

<https://s15.picofile.com/d/840873018/7039a720-8ceb-427f-a410-94902d1fa1b1/hendeseh222.mp4>

تدریس درس اول بخش سوم

<https://s15.picofile.com/d/8409394192/bfe08f05-10f0-4ea4-8106-0f01cd184d68/hendeseh233.mp4>

تدریس درس اول بخش چهارم

<https://s14.picofile.com/d/8409899734/217e4af1-bd04-4a4b-97fb-098f8e12d09c/hendeseh244.mp4>

تدریس درس دوم بخش اول

<https://s16.picofile.com/d/8411184092/8c3b7343-1310-40e4-a702-4099420f7e7c/hendeseh255.mp4>

تدریس درس دوم بخش دوم

<https://s17.picofile.com/d/8412487076/9b279010-2829-4439-9d78-04a203ecaeee/hendeseh266.mp4>

تدریس درس سوم بخش اول

<https://s16.picofile.com/d/8414016042/3b473721-24aa-463a-93ee-c30e72a840dd/hendeseh277.mp4>

تدریس درس سوم بخش دوم

<https://s16.picofile.com/d/8414806676/c011afae-1a2c-4500-b21a-787726df9b76/hendeseh288.mp4>

تدریس درس سوم بخش سوم

<https://s17.picofile.com/d/8417304026/1eff708e-d05a-4c37-bfaf-08fbd1409724/hendeseh299d11.mp4>