

تاریخ: (روز/ماه/سال)		پایه: دوازدهم	آزمون نابرابری ها: ریاضیات گسسته	
نمره ورقه :		دبیرستان نمونه دولتی استاد شهریار	نام و نام خانوادگی:	
نمره	سوالات			ردیف

۲	۱ اگر x و y دو عدد حقیقی باشند، آنگاه ثابت کنید: $2x^4 + 1 \geq 2x^3 + x^2$ اثبات: $2x^4 - 2x^3 - x^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2x^3(x-1) - (x^2-1) \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^3 - x - 1) \geq 0$ $\Leftrightarrow (x-1)^2(2x^2 + 2x + 1) \geq 0$ نامساوی $(x-1)(2x^2 + 2x + 1) \geq 0$ با $2x^4 + 1 \geq 2x^3 + x^2$ هم ارز است و چون $(x-1)(2x^2 + 2x + 1) \geq 0$ همواره درست است لذا $2x^4 + 1 \geq 2x^3 + x^2$ نیز درست است.	۱
۲	۲ اگر x و y دو عدد حقیقی باشند، آنگاه ثابت کنید: $x^4 + y^4 + 4xy + 2 \geq 0$ اثبات: $x^4 + y^4 + 4xy + 2 \geq 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 + (y^2)^2 - 2x^2y^2 + 2x^2y^2 + 4xy + 2 \geq 0 \Leftrightarrow$ $(x^2 - y^2)^2 + 2(x^2y^2 + 2xy + 1) \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 - y^2)^2 + 2(xy + 1)^2 \geq 0$ نامساوی $(x^2 - y^2)^2 + 2(xy + 1)^2 \geq 0$ با $x^4 + y^4 + 4xy + 2 \geq 0$ هم ارز است و چون $(x^2 - y^2)^2 + 2(xy + 1)^2 \geq 0$ همواره درست است پس $x^4 + y^4 + 4xy + 2 \geq 0$ نیز درست است.	۲
۲	۳ اگر x و y دو عدد حقیقی باشند، آنگاه ثابت کنید: $x^4 + y^4 + z^4 + 1 \geq 2x(xy^2 - x + z + 1)$ $x^4 + y^4 + z^4 + 1 \geq 2x(xy^2 - x + z + 1) \Leftrightarrow x^4 + y^4 + z^4 + 1 - 2x^2y^2 + 2x^2 - 2xz - 2x \geq 0$ $\Leftrightarrow (x^4 - 2x^2y^2 + y^4) + (x^2 - 2xz + z^2) + (x^2 - 2x + 1) \geq 0 \Leftrightarrow$ $(x^2 - y^2)^2 + (x - z)^2 + (x - 1)^2 \geq 0$	۳
۲	۴ اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، آنگاه ثابت کنید: $a^2 + b^2 + 1 \geq a\sqrt{b^2 + 1} + b\sqrt{a^2 + 1}$ $a^2 + b^2 + 1 \geq a\sqrt{b^2 + 1} + b\sqrt{a^2 + 1} \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2 \geq 2a\sqrt{b^2 + 1} + 2b\sqrt{a^2 + 1} \geq 0$ $\Leftrightarrow (a^2 - 2a\sqrt{b^2 + 1} + b^2 + 1) + (b^2 - 2b\sqrt{a^2 + 1} + a^2 + 1) \geq 0 \Leftrightarrow$ $(a - \sqrt{b^2 + 1})^2 + (b - \sqrt{a^2 + 1})^2 \geq 0$ نامساوی $(a - \sqrt{b^2 + 1})^2 + (b - \sqrt{a^2 + 1})^2 \geq 0$ با $a^2 + b^2 + 1 \geq a\sqrt{b^2 + 1} + b\sqrt{a^2 + 1}$ هم ارز است چون $(a - \sqrt{b^2 + 1})^2 + (b - \sqrt{a^2 + 1})^2 \geq 0$ همواره درست است پس $a^2 + b^2 + 1 \geq a\sqrt{b^2 + 1} + b\sqrt{a^2 + 1}$ درست است.	۴
۲	۵ اگر a و b دو عدد حقیقی مخالف صفر باشند، آنگاه ثابت کنید: $\left \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right \geq 2$ اثبات: $\left \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right \geq 2 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)^2 \geq 4 \Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 2 \geq 4 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right)^2 \geq 0$	۵

۶	اگر a و b دو عدد حقیقی هم علامت و مخالف صفر باشند، آنگاه ثابت کنید: $(a+b)(\frac{1}{b} + \frac{4}{a}) \geq 9$ $(a+b)(\frac{1}{b} + \frac{4}{a}) \geq 9 \xrightarrow{\times ab > 0} (a+b)(a+4b) \geq 9ab \Leftrightarrow a^2 + 4ab + ab + 4b^2 - 9ab \geq 0$ $\Leftrightarrow a^2 - 4ab + 4b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a-2b)^2 \geq 0$ نامساوی $(a-2b)^2 \geq 0$ با $(a+b)(\frac{1}{b} + \frac{4}{a}) \geq 9$ هم ارز است چون $(a-2b)^2 \geq 0$ همواره درست است لذا $(a+b)(\frac{1}{b} + \frac{4}{a}) \geq 9$ نیز درست است.
۷	گزاره روبرو را به روش بازگشتی ثابت کنید: $17x^2 + y^2 \geq 4(2xy + x - 1)$ $17x^2 + y^2 \geq 4(2xy + x - 1) \Leftrightarrow 16x^2 + x^2 + y^2 - 8xy - 4x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow$ $(16x^2 - 8xy + y^2) + (x^2 - 4x + 4) \geq 0 \Leftrightarrow (4x - y)^2 + (x - 2)^2 \geq 0$
۸	گزاره روبرو را به روش بازگشتی ثابت کنید: $4x^2 + y^2 + 1 \geq 2xy - 2x + y$ $4x^2 + y^2 + 1 \geq 2xy - 2x + y \xrightarrow{\times 2} 8x^2 + 2y^2 + 2 \geq 4xy - 4x + 2y \Leftrightarrow$ $(4x^2 - 4xy + y^2) + (4x^2 + 4x + 1) + (y^2 - 2y + 1) \geq 0$ اثبات $(2x - y)^2 + (2x + 1)^2 + (y - 1)^2 \geq 0$
۹	به کمک اثبات بازگشتی برای هر دو عدد حقیقی a و b ثابت کنید: $a^2 + 1 \geq (b+1)(a-b)$ $a^2 + 1 \geq (b+1)(a-b) \Leftrightarrow a^2 + 1 \geq ab - b^2 + a - b \xrightarrow{\times 2} 2a^2 + 2 \geq 2ab - 2b^2 + 2a - 2b \Leftrightarrow (a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2a + 1) + (b^2 + 2b + 1) \geq 0$ $\Leftrightarrow (a-b)^2 + (a-1)^2 + (b+1)^2 \geq 0$
۱۰	اگر a و b دو عدد حقیقی هم علامت باشند آنگاه: $\frac{a-b}{b} \geq \frac{3a-5b}{13a}$ $\frac{a-b}{b} \geq \frac{3a-5b}{13a} \xrightarrow{\times (13ab > 0)} 13a^2 - 13ab \geq 3ab - 5b^2 \Leftrightarrow$ اثبات: $(9a^2 - 12ab + 4b^2) + (4a^2 + 4ab + b^2) \geq 0 \Leftrightarrow (3a-2b)^2 + (2a+b)^2 \geq 0$
۲۰	موفق و سربلند باشید. شعر باف جمع