بسمه تعالی

آزمون نابرابری ها:ریاضیات گسسته	پایه: دوازدهم	تاریخ:
نام ونام خانوادگی:	دبیرستان نمونه دولتی استاد شهریار	نمره ورقه :

ردیف	سوالات	نمره
۱	اگر x و y دو عدد حقیقی باشند ، آنگاه ثابت کنید : $۲x^۴+۱\geq ۲x^۳+x^۲$	۲
۲	اگر x و y دو عدد حقیقی باشند ، آنگاه ثابت کنید : $x^۴+y^۴+۴xy+۲\geq ۰$.	۲
۳	اگر x و y دو عدد حقیقی باشند ، آنگاه ثابت کنید : $x^۴+y^۴+z^۲+۱\geq ۲x(xy^۲-x+z+۱)$	۲
۴	اگر a و b دو عدد حقیقی باشند ، آنگاه ثابت کنید : $a^۲+b^۲+۱\geq a\sqrt{b^۲+۱}+b\sqrt{a^۲+۱}$	۲
۵	اگر a و b دو عدد حقیقی مخالف صفر باشند ، آنگاه ثابت کنید : $\left\|\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right\|\geq ۲$	۲

۶	اگر a و b دو عدد حقیقی هم علامت و مخالف صفر باشند ، آنگاه ثابت کنید : $(a+b)(\frac{۱}{b}+\frac{۴}{a}) \geq ۹$	۲
۷	گزاره روبرو را به روش بازگشتی ثابت کنید: $۱۷x^۲ + y^۲ \geq ۴(۲xy + x - ۱)$	۲
۸	گزاره روبرو را به روش بازگشتی ثابت کنید: $۴x^۲ + y^۲ + ۱ \geq ۲xy - ۲x + y$	۲
۹	به کمک اثبات بازگشتی برای هر دو عدد حقیقی a و b ثا بت کنید: $a^۲ + ۱ \geq (b+۱)(a-b)$	۲
۱۰	اگر a و b دو عدد حقیقی هم علامت با شند آنگاه : $\frac{a-b}{b} \geq \frac{۳a-۵b}{۱۳a}$	۲
	موفق و سربلند باشید.شعرباف	جمع ۲۰

بسمه تعالی

آزمون نابرابری ها:ریاضیات گسسته	پایه: دوازدهم	تاریخ:
نام ونام خانوادگی:	دبیرستان نمونه دولتی استاد شهریار	نمره ورقه :

ردیف	سوالات	نمره
۱	اگر x و y دو عدد حقیقی باشند ، آنگاه ثابت کنید : $۲x^۴+۱\geq ۲x^۳+x^۲$ اثبات : $۲x^۴-۲x^۳-x^۲+۱\geq ۰ \Leftrightarrow ۲x^۳(x-۱)-(x^۲-۱)\geq ۰ \Leftrightarrow (x-۱)(۲x^۳-x-۱)\geq ۰$ $\Leftrightarrow (x-۱)^۲(۲x^۲+۲x+۱)\geq ۰$ نامساوی $(x-۱)(۲x^۲+۲x+۱)\geq ۰$ با $۲x^۴+۱\geq ۲x^۳+x^۲$ هم ارز است وچون $(x-۱)(۲x^۲+۲x+۱)\geq ۰$ همواره درست است لذا $۲x^۴+۱\geq ۲x^۳+x^۲$ نیز درست است.	۲
۲	اگر x و y دو عدد حقیقی باشند ، آنگاه ثابت کنید : $x^۴+y^۴+۴xy+۲\geq ۰$ اثبات: $x^۴+y^۴+۴xy+۲\geq ۰ \Leftrightarrow (x^۲)^۲+(y^۲)^۲-۲x^۲y^۲+۲x^۲y^۲+۴xy+۲\geq ۰ \Leftrightarrow$ $(x^۲-y^۲)^۲+۲(x^۲y^۲+۲xy+۱)\geq ۰ \Leftrightarrow (x^۲-y^۲)^۲+۲(xy+۱)^۲\geq ۰$ نامساوی $(x^۲-y^۲)^۲+۲(xy+۱)^۲\geq ۰$ با $x^۴+y^۴+۴xy+۲\geq ۰$ هم ارز است وچون $(x^۲-y^۲)^۲+۲(xy+۱)^۲\geq ۰$ همواره درست است پس $x^۴+y^۴+۴xy+۲\geq ۰$ نیز درست است.	۲
۳	اگر x و y دو عدد حقیقی باشند ، آنگاه ثابت کنید : $x^۴+y^۴+z^۲+۱\geq ۲x(xy^۲-x+z+۱)$ $x^۴+y^۴+z^۲+۱\geq ۲x(xy^۲-x+z+۱) \Leftrightarrow x^۴+y^۴+z^۲+۱-۲x^۲y^۲+۲x^۲-۲xz-۲x\geq ۰$ $\Leftrightarrow (x^۴-۲x^۲y^۲+y^۴)+(x^۲-۲xz+z^۲)+(x^۲-۲x+۱)\geq ۰ \Leftrightarrow$ $(x^۲-y^۲)^۲+(x-z)^۲+(x-۱)^۲\geq ۰$	۲
۴	اگر a و b دو عدد حقیقی باشند ، آنگاه ثابت کنید : $a^۲+b^۲+۱\geq a\sqrt{b^۲+۱}+b\sqrt{a^۲+۱}$ $a^۲+b^۲+۱\geq a\sqrt{b^۲+۱}+b\sqrt{a^۲+۱} \Leftrightarrow ۲a^۲+۲b^۲+۲\geq ۲a\sqrt{b^۲+۱}+۲b\sqrt{a^۲+۱}\geq ۰$ $\Leftrightarrow (a^۲-۲a\sqrt{b^۲+۱}+b^۲+۱)+(b^۲-۲b\sqrt{a^۲+۱}+a^۲+۱)\geq ۰ \Leftrightarrow$: $(a-\sqrt{b^۲+۱})^۲+(b-\sqrt{a^۲+۱})^۲\geq ۰$ نامساوی $(a-\sqrt{b^۲+۱})^۲+(b-\sqrt{a^۲+۱})^۲\geq ۰$ با $a^۲+b^۲+۱\geq a\sqrt{b^۲+۱}+b\sqrt{a^۲+۱}$ هم ارز است چون $(a-\sqrt{b^۲+۱})^۲+(b-\sqrt{a^۲+۱})^۲\geq ۰$ همواره درست است پس $a^۲+b^۲+۱\geq a\sqrt{b^۲+۱}+b\sqrt{a^۲+۱}$ درست است.	۲
۵	اگر a و b دو عدد حقیقی مخالف صفر باشند ، آنگاه ثابت کنید : $\left\|\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right\|\geq ۲$ اثبات : $\left\|\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right\|\geq ۲ \Leftrightarrow (\frac{a}{b}+\frac{b}{a})^۲\geq ۴ \Leftrightarrow \frac{a^۲}{b^۲}+\frac{b^۲}{a^۲}+۲\geq ۴ \Leftrightarrow (\frac{a}{b}-\frac{b}{a})^۲\geq ۰$	۲

۶	اگر a و b دو عدد حقیقی هم علامت و مخالف صفر باشند ، آنگاه ثابت کنید : $(a+b)(\frac{۱}{b}+\frac{۴}{a})\geq ۹$ $(a+b)(\frac{۱}{b}+\frac{۴}{a})\geq ۹ \xleftarrow{\times ab>۰} (a+b)(a+۴b)\geq ۹ab \Leftrightarrow a^۲+۴ab+ab+۴b^۲-۹ab\geq ۰$ $\Leftrightarrow a^۲-۴ab+۴b^۲\geq ۰ \Leftrightarrow (a-۲b)^۲\geq ۰$ نامساوی $(a-۲b)^۲\geq ۰$ با $(a+b)(\frac{۱}{b}+\frac{۴}{a})\geq ۹$ هم ارز است چون $(a-۲b)^۲\geq ۰$ همواره درست است لذا $(a+b)(\frac{۱}{b}+\frac{۴}{a})\geq ۹$ نیز درست است.	۲
۷	گزاره روبرو را به روش بازگشتی ثابت کنید: $۱۷x^۲+y^۲\geq ۴(۲xy+x-۱)$ $۱۷x^۲+y^۲\geq ۴(۲xy+x-۱) \Leftrightarrow ۱۶x^۲+x^۲+y^۲-۸xy-۴x+۴\geq ۰ \Leftrightarrow$ $(۱۶x^۲-۸xy+y^۲)+(x^۲-۴x+۴)\geq ۰ \Leftrightarrow (۴x-y)^۲+(x-۲)^۲\geq ۰$	۲
۸	گزاره روبرو را به روش بازگشتی ثابت کنید: $۴x^۲+y^۲+۱\geq ۲xy-۲x+y$ $۴x^۲+y^۲+۱\geq ۲xy-۲x+y \xleftarrow{\times ۲} ۸x^۲+۲y^۲+۲\geq ۴xy-۴x+۲y \Leftrightarrow$ اثبات : $(۴x^۲-۴xy+y^۲)+(۴x^۲+۴x+۱)+(y^۲-۲y+۱)\geq ۰$ $(۲x-y)^۲+(۲x+۱)^۲+(y-۱)^۲\geq ۰$	۲
۹	به کمک اثبات بازگشتی برای هر دو عدد حقیقی a و b ثا بت کنید: $a^۲+۱\geq (b+۱)(a-b)$ $a^۲+۱\geq (b+۱)(a-b) \Leftrightarrow a^۲+۱\geq ab-b^۲+a-b \xleftarrow{\times ۲}$ $۲a^۲+۲\geq ۲ab-۲b^۲+۲a-۲b \Leftrightarrow (a^۲-۲ab+b^۲)+(a^۲-۲a+۱)+(b^۲+۲b+۱)\geq ۰$ $\Leftrightarrow (a-b)^۲+(a-۱)^۲+(b+۱)^۲\geq ۰$	۲
۱۰	اگر a و b دو عدد حقیقی هم علامت با شند آنگاه : $\frac{a-b}{b}\geq \frac{۳a-۵b}{۱۳a}$ اثبات : $\frac{a-b}{b}\geq \frac{۳a-۵b}{۱۳a} \xleftarrow{\times(۱۳ab>۰)} ۱۳a^۲-۱۳ab\geq ۳ab-۵b^۲ \Leftrightarrow$ $(۹a^۲-۱۲ab+۴b^۲)+(۴a^۲+۴ab+b^۲)\geq ۰ \Leftrightarrow (۳a-۲b)^۲+(۲a+b)^۲\geq ۰$	۲
	موفق و سربلند باشید.شعرباف	جمع ۲۰